دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

United Arab Emirates

المـــــــــــادة : الرياضيات
عدد صفحات الأسئلة : (6)

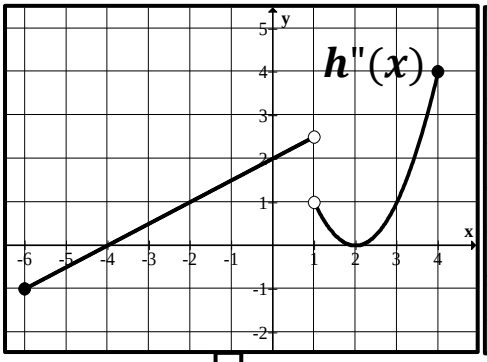
الامتحان التدريبي للفصل الدراسي الثاني للصف الثاني عشر / القسم العلمي
للعام الدراسي 2011/ 2012 م

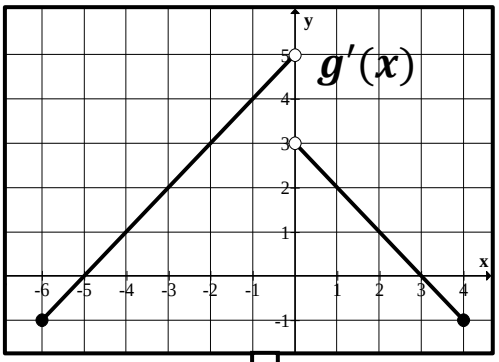
على الطالب التأكد من عدد صفحات الأسئلة
(الإجابة على الورقة نفسها)

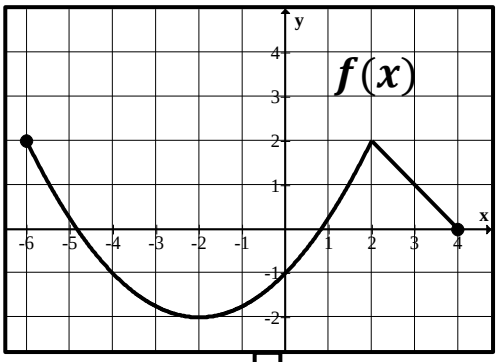
السؤال الأول

أولاً : 1) لتكن $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ دوال متصلة على الفترة $[-6,4]$

فيما يلي بيان كلا من $f(x)$, $g'(x)$, $h''(x)$ ، من الرسم أكمل العبارات التالية :







- النقاط الحرجة للدالة هي :

$x = 2 \ , x = -2$

- الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة.

$[-2,2]$

- قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة صغرى مطلقة.

$x = -2$

- قيم x التي يوجد عندها للدالة قيمة عظمى محلية .

$x = 2 \ , x = -6$

- النقاط الحرجة للدالة هي :

$x = -5 \ , \ 0 \ , \ 3$

- الفترات التي تكون عندها الدالة متناقصة.

$[-6,-5] , [3,4]$

- قيمة x التي يوجد عندها للدالة قيمة عظمى محلية.

$x = 3$

- فترات تقعر منحنى الدالة لأعلى

$(-6,0)$

- فترات تقعر منحنى الدالة لأسفل

$(-6,-4)$

- إحدى نقاط الانقلاب للدالة

$(-4, h(-4))$

- $h'''(2)$ تساوي

$h'''(2) = 0$

ثانياً : 2) أوجد قيمة $a\ ,\ b$ بحيث يكون للدالة $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ قيمة صغرى محلية عند $x = 4$ ونقطة انقلاب عند $x = 1$

∵ للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

∴ $f'(4) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 3(4)^2 + 2a(4) + b = 0$

$48 + 8a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 8a + b = -48$

∵ للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ ∴ $f''(1) = 0$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f"(1) = 6(1) + 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a = -6 \quad \Rightarrow \quad a = -3$

بالتعويض في $8a + b = -48$

$8(-3) + b = -48 \quad \Rightarrow \quad -24 + b = -48 \quad \Rightarrow \quad b = -48 + 24 = -24$

ثالثاً : 3) نفرض أن $f(x)$ دالة متصلة على الفتره $[\ 2\ ,\ 5\ ]$ وقابلة للاشتقاق على الفتره $(\ 2\ ,\ 5\ )$

وإذا علمت أن : * $1 < f'(x) < 2$ لجميع قيم x في الفترة $(2\ ,\ 5)$

* $f(2) = -3$

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة اثبت أن : $0 < f(5) < 3$

∵ $f(x)$ داله متصلة على الفترة $[\ 2\ ,\ 5]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(\ 2\ ,\ 5)$

∴ $f(x)$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة وبالتالي توجد c في الفترة $(\ 2\ ,\ 5)$ بحيث :

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{f(5) - (-3)}{3}$$

$3\ f'(c) = f(5) + 3$

∵ $1 < f'(c) < 2$ بالضرب في 3

$3 < 3f'(c) < 6$

$3 < f(5) + 3 < 6$

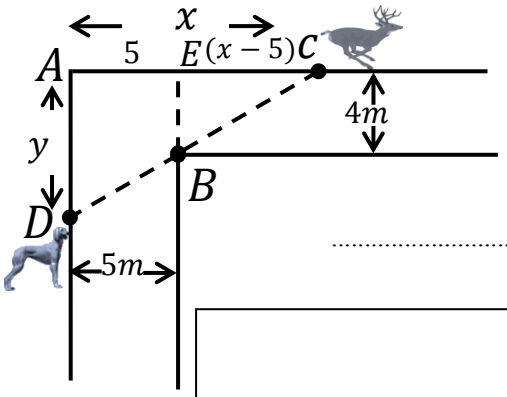
$0 < f(5) < 3$

السؤال الثاني

(الصيد باستخدام الكلب السلوقي هو رياضة تقليدية قديمة مارسها الانسان منذ آلاف السنين في شبه الجزيرة العربية الموطن الأصلي لهذه الكلاب الصحراوية)

أولاً: 4) الشكل يمثل مضمار سباق الكلاب السلوقية بعرض $4\ m$ ، $5\ m$ ، النقطة c تمثل موقع الظبي الذي يجري بمعدل $10\ m/sec$ متجها إلى اليمين ، النقطة D تمثل موقع الكلب السلوقي .

ما السرعة التي يجب أن يجري بها الكلب ليجعل فريسته (الظبي) في مجال رؤيته عندما يكون الظبي على بعد $7.5\ m$ من النقطة A



.....

.....

.....

بفرض أن بعد الظبي عن النقطة A هو x

وبعد الكلب السلوقي عن النقطة A هو y

$$\Delta DAC \approx \Delta BEC$$

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{x-5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4x}{x-5}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4(x-5)\frac{dx}{dt} - 4x\frac{dx}{dt}}{(x-5)^2}$$

عندما $\frac{dx}{dt} = 10\ m/sec\ ,\ x = 7.5m$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4(7.5-5)\times 10-(4\times 7.5\times 10)}{(7.5-5)^2} = -32\ m/sec$$

∴ يقترب الكلب من فريسته (الظبي) لتبقى في مجال رؤيته بمعدل $32\ m/sec$

.....

ثانياً: 5) شريط طوله $130\ cm$ لف مرتين على علبة حلوى اسطوانية الشكل لتزيينها (كما هو موضح بالشكل) وخصص منه $10\ cm$ لصنع ربطة التزيين العلوية .
أوجد طول نصف قطر العلبه وارتفاعها التي تجعل حجمها أكبر ما يمكن .

.....

بفرض أن ارتفاع الاسطوانه h وطول نصف قطرها r

وعند تخصيص $10\ cm$ لصنع ربطة التزيين العلوية فالمتبقي من الشريط طوله $120\ cm$

$$\therefore\ 4h + 8r = 120\ cm$$

$$h = \frac{120-8r}{4} \ \rightarrow\ h = 30 - 2r$$

$$V = \pi r^2\, h$$

$$V(r) = \pi r^2\,(30 - 2r) = 30\pi r^2\ - 2\pi r^3$$

حيث $0 \ \leq\ r \leq 15$

$$\frac{dV}{dr} = 30\pi \times 2r - 6\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dr} = 0 \ \Rightarrow\ 60\pi r - 6\pi r^2 = 0 \ \Rightarrow\ 6\pi r(\,10 - r\,) = 0 \ \Rightarrow\ r = 0\ ,\ r = 10$$

$$V(0) = 30\pi \times 0\ - 2\pi \times 0\ = 0$$

$$V(10) = 30\pi \times 100\ - 2\pi \times 1000\ \approx 3141.6\ \ cm^3$$

$$V(15) = 30\pi \times (15)^2\ - 2\pi \times (15)^3 = 0$$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $r = 10\ cm$ ، $h = 30 - 2r = 30 - 20 = 10cm$

$\therefore$ حجم الاسطوانه أكبر ما يمكن عندما يكون طول نصف قطرها $10\ cm$
وارتفاعها $10\ cm$

.....

السؤال الثالث

أولاً: مركبة فضائية استكشافية تنطلق باتجاه كوكب بمسار على شكل قطع زائد مركزة نقطة الاصل مروراً بإحدى نقطتي طرفي المحور القاطع $(5\,,0)$ وتقترب من المستقيم الذي معادلته $y = \frac{2}{5}x$

أوجد :

6) معادلة القطع الزائد .

مركزالقطع الزائد $(0,0)$

إحدى نقطتي طرفي المحور القاطع $(5,0) \leftarrow a = 5$

من معادلة خط التقارب $y = \frac{2}{5}x$ وهي على الصورة $y = \pm \frac{b}{a}x$

$\because a = 5 \quad \rightarrow b = 2$

معادلة القطع الزائد : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

7) البؤرتان .

$c^2 = a^2 + b^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = 25 + 4 = 29 \rightarrow \quad c = \sqrt{29}$

البؤرتان : $(\pm c\,,0)$

$\left(\sqrt{29},0\right) \,, \left(-\sqrt{29}\,,0\right)$

ثانياً: قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور السينات ، ودليله يمر بالنقطة $(-3\,,-2)$

أوجد 8) بؤرة القطع المكافئ .

$\because$ الرأس نقطة الأصل وبؤرته تقع على محور السينات إذاً البؤرة $\left(\frac{1}{4a}\,,0\right)$

$\because$ النقطة $(-3\,,-2)$ تمر بالدليل إذاً معادلة الدليل $x = -2$

$x = \frac{-1}{4a} = -2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4a} = 2$

إذاً البؤرة $(2\,,0)$

9) معادلة القطع المكافئ .

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ $x = a\,y^2$

$\frac{1}{4a} = 2 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{8}\,y^2$

ثالثاً: إذا كانت المعادلة $4(x+3)^2 + y^2 - 2y = 15$ تمثل قطعاً ناقصاً .

10) ضع معادلة القطع في الصورة القياسية .

$$4(x+3)^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 15$$
$$4(x+3)^2 + (y-1)^2 - 1 = 15$$
$$4(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$$
$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

11) أوجد رأس القطع .

$$(h\,,k) \quad \rightarrow \quad (-3\,,1)$$

12) أوجد البؤرتين .

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow \quad c^2 = 16 - 4 \rightarrow c = \sqrt{12}$$

البؤرتان : $(h, k \pm c)$

$$(-3\,,1 + \sqrt{12}) \;\;, (-3\,,1 - \sqrt{12}\,)$$

13) أوجد نقطتي طرفي المحور الأكبر .

$$(h, k \pm a) \quad \rightarrow (-3, 1 \pm 4)$$
$$(-3\,,5) \;\;, (-3\,,-3\,)$$

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالنجاح والتوفيق