

Volumes by Slicing and Rotation About an Axis

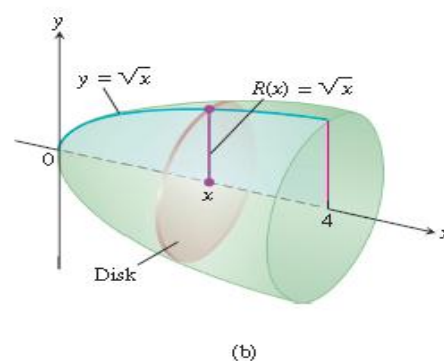
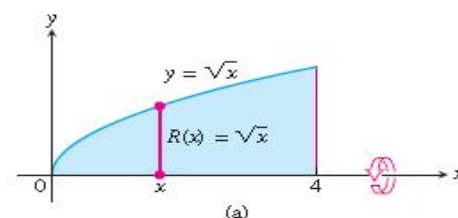
$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

EXAMPLE 4 A Solid of Revolution (Rotation About the x-Axis)

The region between the curve $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, and the x-axis is revolved about the x-axis to generate a solid. Find its volume.

Solution We draw figures showing the region, a typical radius, and the generated solid (Figure 6.8). The volume is

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[R(x)]^2 dx \\ &= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

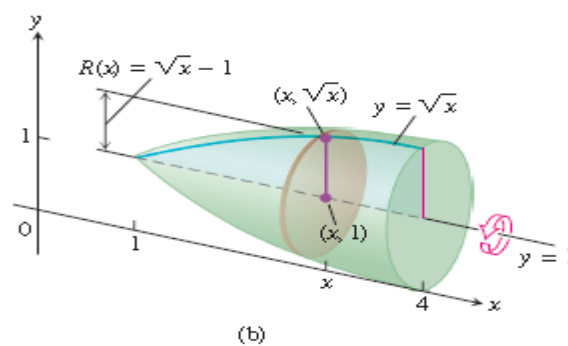
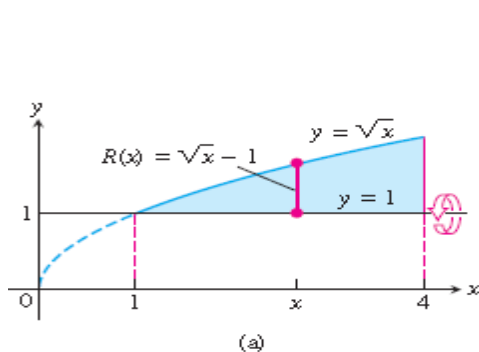


EXAMPLE 6 A Solid of Revolution (Rotation About the Line $y = 1$)

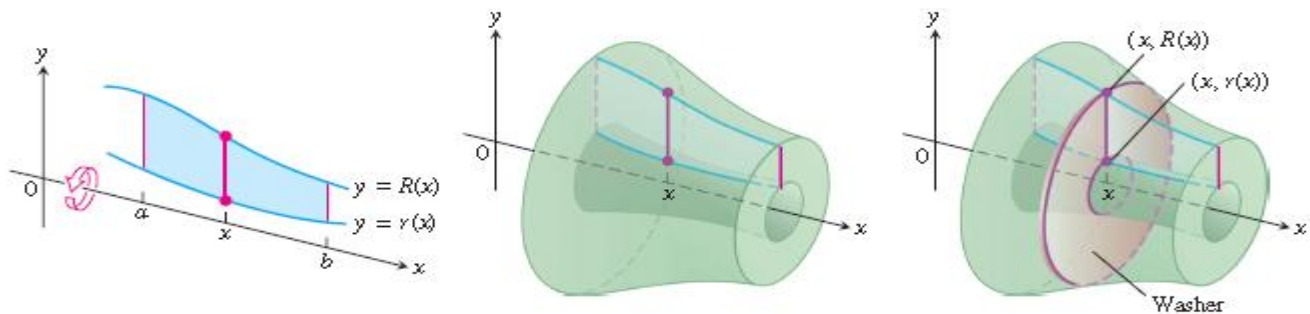
Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y = \sqrt{x}$ and the lines $y = 1$, $x = 4$ about the line $y = 1$.

Solution We draw figures showing the region, a typical radius, and the generated solid (Figure 6.10). The volume is

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 \pi[R(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi[\sqrt{x} - 1]^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] dx \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}. \end{aligned}$$



Solids of Revolution: The Washer Method

Outer radius: $R(x)$ Inner radius: $r(x)$

$$A(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2).$$

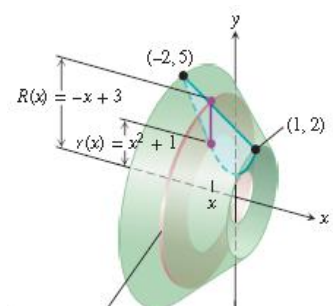
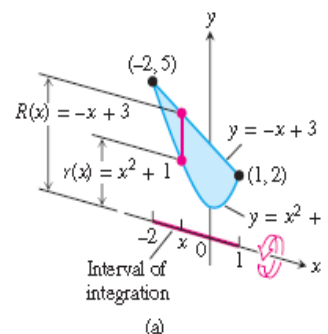
$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx.$$

EXAMPLE 9 A Washer Cross-Section (Rotation About the x -Axis)

The region bounded by the curve $y = x^2 + 1$ and the line $y = -x + 3$ is revolved about the x -axis to generate a solid. Find the volume of the solid.

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x &= -2, \quad x = 1 \end{aligned}$$

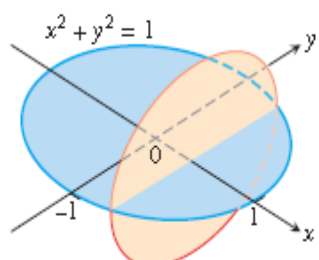
Outer radius: $R(x) = -x + 3$
Inner radius: $r(x) = x^2 + 1$



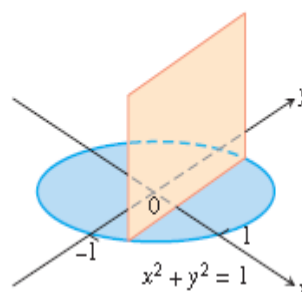
$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2) dx \\ &= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4) dx \\ &= \pi \left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

1. The solid lies between planes perpendicular to the x -axis at $x = -1$ and $x = 1$. In each case, the cross-sections perpendicular to the x -axis between these planes run from the semicircle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ to the semicircle $y = \sqrt{1 - x^2}$.

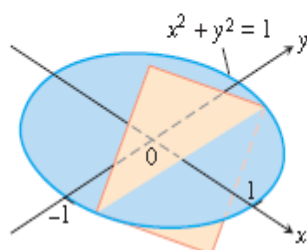
- a. The cross-sections are circular disks with diameters in the xy -plane.



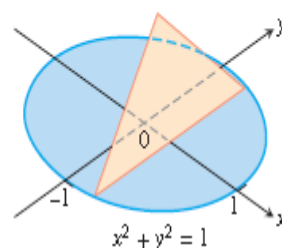
- b. The cross-sections are squares with bases in the xy -plane.



The cross-sections are squares with diagonals in the xy -plane. (The length of a square's diagonal is $\sqrt{2}$ times the length of its sides.)

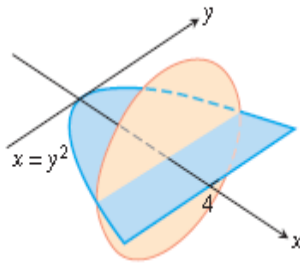


- d. The cross-sections are equilateral triangles with bases in the xy -plane.

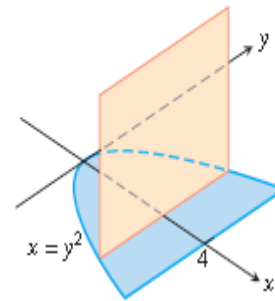


The solid lies between planes perpendicular to the x -axis at $x = 0$ and $x = 4$. The cross-sections perpendicular to the x -axis between these planes run from the parabola $y = -\sqrt{x}$ to the parabola $y = \sqrt{x}$.

- a. The cross-sections are circular disks with diameters in the xy -plane.



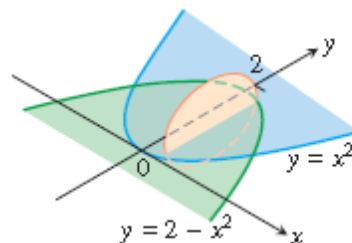
- b. The cross-sections are squares with bases in the xy -plane.



- c. The cross-sections are squares with diagonals in the xy -plane.

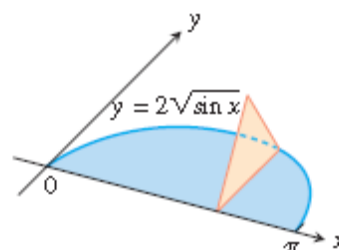
- d. The cross-sections are equilateral triangles with bases in the xy -plane.

The solid lies between planes perpendicular to the x -axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x -axis are circular disks whose diameters run from the parabola $y = x^2$ to the parabola $y = 2 - x^2$.



The base of a solid is the region between the curve $y = 2\sqrt{\sin x}$ and the interval $[0, \pi]$ on the x -axis. The cross-sections perpendicular to the x -axis are

- a. equilateral triangles with bases running from the x -axis to the curve as shown in the figure.
- b. squares with bases running from the x -axis to the curve.

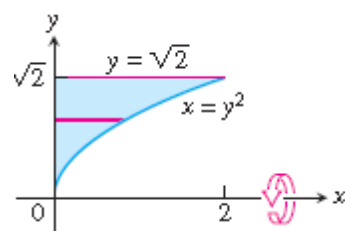
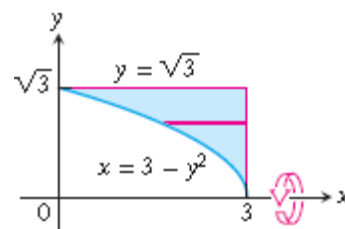
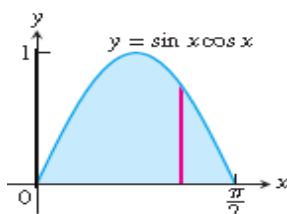
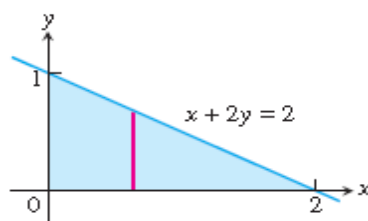


- . The solid lies between planes perpendicular to the x -axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x -axis between these planes are squares whose diagonals run from the semicircle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ to the semicircle $y = \sqrt{1 - x^2}$.

The solid lies between planes perpendicular to the x -axis at $x = -1$ and $x = 1$. The cross-sections perpendicular to the x -axis between these planes are squares whose bases run from the semicircle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ to the semicircle $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Find the volume of the solid generated by revolving the shaded region about the given axis

About the x -axis

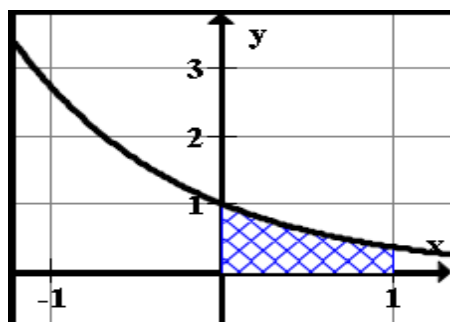


أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة فوق محور السينات وتحت القطع الناقص الذي معادلته $2x^2 + y^2 = 18$ دورة كاملة حول محور السينات

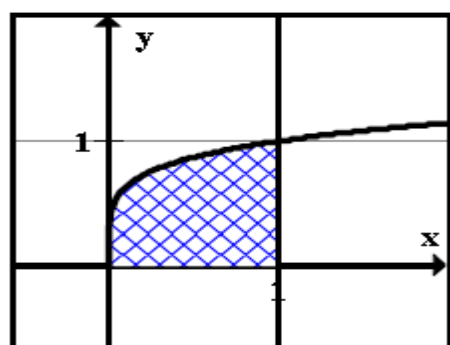
أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني هي مربعات أقطارها في المستوى xy تقع بين المنحنيين $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x^2$

أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $X = 0$, $X = \pi$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[0, \pi]$ هي مثلثات متساوية الإضلاع قواعدها في المستوى xy تقع بين المحور السيني والمنحنى $f(x) = \sqrt{2} \sin x$

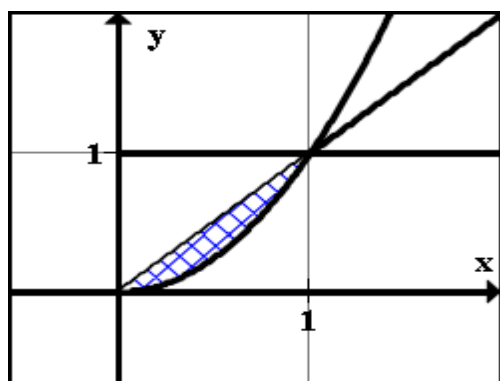
أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحصورة بمنحنى الدالة $f(x) = e^{-x}$ والمستقيمتين $x=0$ ، $y=0$ ، $x=1$ إذا كانت المقاطع العرضية مثلثات متساوية الأضلاع ومتعامدة مع المحور السيني



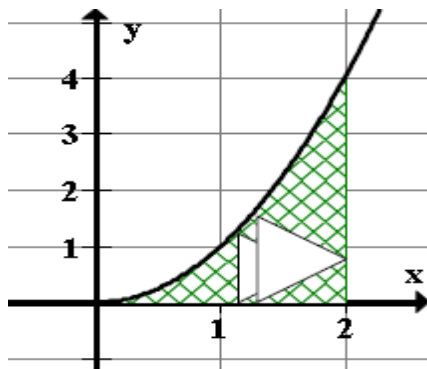
أوجد حجم الجسم الناتج من دورة كاملة حول المستقيم $y = -1$ للمنطقة المحدودة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x}$ والمستقيمان $x=0$ ، $x=1$



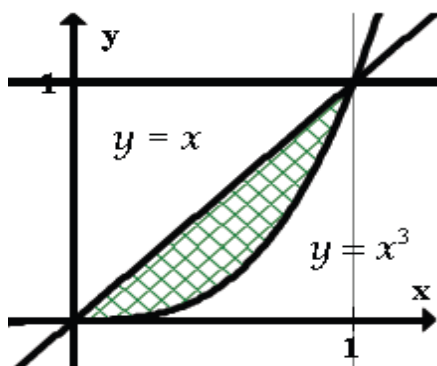
أوجد حجم الجسم الناتج من دورة كاملة حول المستقيم $y = 1$ للمنطقة المحدودة بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x$ و $0 \leq x \leq 1$



أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$, $x = 2$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في $[0, 2]$ هي مثلثات متطابقة الأضلاع قواعدها في المستوى xy واقعة بين المنحنى $y = x^2$ ومحور السينات .



أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$ في $[0, 1]$ دورة كاملة حول المستقيم $y = 1$



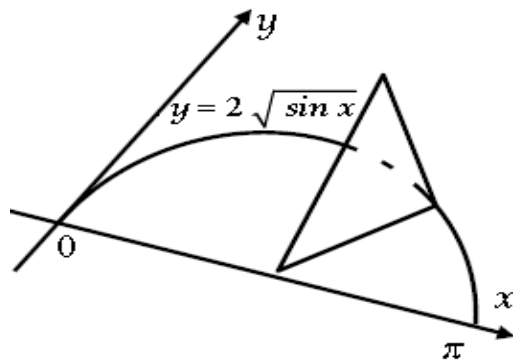
أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$ و $x = 1$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[0, 1]$ هي مثلثات متساوية الأضلاع قواعدها في المستوى xy تقع بين

$$f(x) = \frac{2}{x+1} \text{ والمحور السيني}$$

أوجد الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$ ، $x = \frac{\pi}{2}$ والمقاطع العرضية

العمودية على المحور السيني في الفترة $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ هي مثلثات متطابقة الأضلاع قواعدها في المستوي xy

ومحصورة بين محور السينات والمنحني $f(x) = \sin x$



امتحان الإعادة 2008 / 2009 م

(37) _ أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين

على المحور السيني عند $x = 0$ ، $x = \pi$ والمقاطع العرضية العمودية

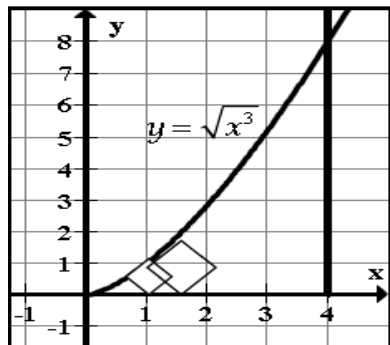
على المحور السيني في الفترة $0 \leq x \leq \pi$ هي مثلثات متساوية الأضلاع

قواعدها في المستوي xy ومحصورة بين محور السينات والمنحني

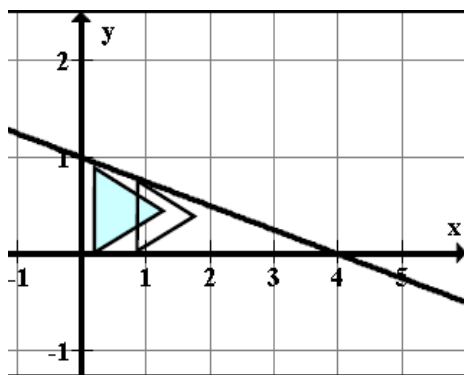
$$y = 2\sqrt{\sin x}$$

(مساعدة رياضية مساحة المقطع (المثلث المتساوي الأضلاع) هي $A_{(L)} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$)

أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$, $x = 4$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[0, 4]$ مربعات أقطارها في المستوى xy واقعة بين $y = \sqrt{x^3}$ ومحور السينات .



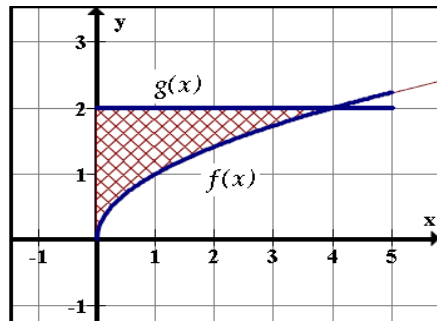
أوجد حجم الجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 0$ و $x = 4$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $0 \leq x \leq 4$ هي مثلثات متساوية الأضلاع قواعدها في المستوى xy تقع بين المحور السيني والمستقيم $x + 4y = 4$



امتحان الاعدادة 2009 / 2010 م

إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2$

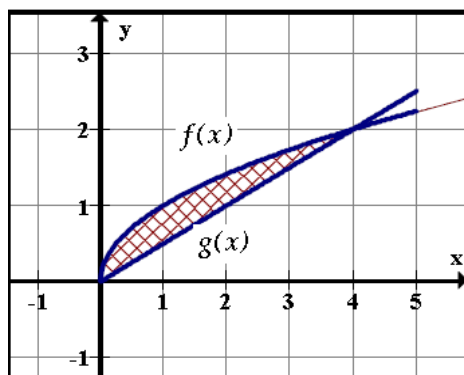
أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيين $f(x)$, $g(x)$ دورة كاملة حول محور السينات



امتحان 2009 / 2010 م

$$g(x) = \frac{1}{2}x \quad , \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{إذا كان}$$

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيين $g(x)$, $f(x)$ دورة كاملة حول محور السينات



أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم $y = 1$ حول :

$$y = -1 \quad \text{(ب) المستقيم}$$

$$y = 1 \quad \text{(أ) المستقيم}$$

أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بـ $y = \sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$, $y = 2$ حول:

(أ) محور السينات (ب) المستقيم $y = 2$

مساحة المنطقة المستوية

- (1) مربع طول ضلعه x . $A(x) = x^2$
- (2) مربع طول قطره x . $A(x) = \frac{1}{2} x^2$
- (3) نصف دائرة نصف قطرها x . $A(x) = \frac{1}{2} \pi x^2$
- (4) نصف دائرة قطرها x . $A(x) = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{8} \pi x^2$
- (5) مثلث متساوي الإضلاع طول ضلعه x . $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$
- (6) مثلث قائم ومتساوي الساقين طول كل من ساقيه x . $A(x) = \frac{1}{2} x^2$
- (7) مثلث قائم ومتساوي الساقين طول وتره x . $A(x) = \frac{1}{4} x^2$
- (8) مثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $2x$ وطول الضلع الثالث x . $A(x) = \frac{\sqrt{15}}{4} x^2$
- (9) مثلث أطوال أضلاعه $3x$, $4x$, $5x$. $A(x) = 6 x^2$
- (10) سداسي منتظم طول إحد أضلاعه x . $A(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$