مثال تطبيقي على كيفية دراسة الدالة بكافة خصائصها

دراستها رياضياً -حسابيا-

و

دراستها من خلال الرسم

أوجد للدالة :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 - 4$$

1. النقاط الحرجة -إن وجدت-
2. فترات التزايد
3. فترات التناقص
4. القيمة العظمى المحلية
5. القيمة الصغرى المحلية
6. فترات التقعر لأسفل
7. فترات التقعر لأعلى
8. نقاط الانقلاب -إن وجدت-

الحل

نبدأ ببسم الله الرحمن الرحيم

النقاط الحرجة هي نقاط داخلية في مجال الدالة والتي عندها تكون المشتقة تساوي صفر أو غير موجودة.

إذن تعالوا معا نشتق الدالة كي نحصل على النقاط الحرجة بعد أن نساوي المشتقة بصفر !!

$$F'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$F'(x) = 3x^2 - 4x = 0$$

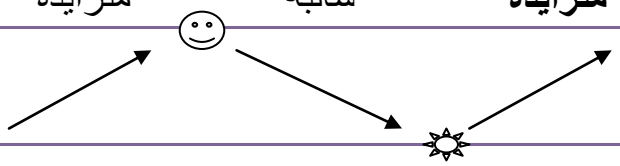
$$x(3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \; or (\, 3x - 4) = 0 \;\rightarrow\rightarrow x = \frac{4}{3}$$

إذن النقاط الحرجة هي

$$\boldsymbol{x = 0 \; or \; x = \frac{4}{3}}$$

الآن لتحديد فترات التزايد والتناقص ، تكون بعد تحديد النقاط الحرجة وصنع جدول المشتقة الأولى

جدول المشتقة الأولى			
x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \infty)$
إشارة $F'(x)$	++++	-------	++++
شكل $F(x)$	متزايدة	سالبة	**متزايدة**
شكل $F(x)$			

لنختر رقم في الفترة $(-\infty, 0)$ كي نحدد إذا كانت موجبة أو سالبة ، وبذلك نعرف شكل الدالة F(x) إا كان متزايد أو متناقص

لنختر الرقم -1

بعد ذلك نعوض في المشتقة الأولى

$$F'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) = 7$$

أي أنها موجبة، نضع في الخانة الأولى +++

الآن في الفترة من $(0 , 4/3)$ لنختر الرقم 1

$$F'(1) = 3(1)^2 - 4(1) = -1$$

أي أنها سالبة ،نضع في الخانة الثانية ------

أخيرا في الفترة $(4/3, \infty)$ ، لنختر 2

$$F'(21) = 3(2)^2 - 4(2) = 4$$

أي أنها موجبة، نضع في الخانة الأخيرة +++

الآن من الجدول ، نستطيع أن نعلم فترات التزايد والتناقص

فترات التزايد

$$\left(\frac{4}{3}, \infty\right) \& (-\infty, 0)$$

فترات التناقص

$$(0, \frac{4}{3})$$

4- القيمة العظمى المحلية

5- القيمة الصغرى المحلية

الرمز ☺ -في الجدول - يدل على قيمة عظمى محلية عند $x = 0$

وقيمتها $F(0)$

$$F(0) = 0 - 0 - 4 = -4$$

الرمز ✵ - في الجدول - يدل على القيمة الصغرى =الدنيا= المحلية عند $x = \frac{4}{3}$

وقيمتها $F(\frac{4}{3})$

$$F\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\ (\frac{4}{3})^2 - 4 = -5.1$$

الآن ولله الحمد تم تحديد والانتهاء من المشتقة الأولى وفوائدها الجمة

6- فترات التقعر لأسفل

7- فترات التقعر لأعلى

8- نقاط الانقلاب -إن وجدت-

6 و7و 8 ، يتم حلهم باستخدام المشتقة الثانية

الآن لتحديد افترات التقعر لأعلى ولأسفل ، نقوم بنفس الشيء الذي فعلناه سابقا

أي نشتق الدالة مرة أخرى ، ونقوم مرة أخرى بجدول المشتقة الثانية.

$$F''(x) = 6x - 4$$

الآن نحدد متى المشتقة الثانية تساوي صفر

$$F''(x) = 6x - 4 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

جدول المشتقة الثانية		
x	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \infty)$
إشارة $F''(x)$	------	++++++
شكل $F(x)$	مقعرة لأسفل	**مقعرة لأعلى**
شكل $F(x)$		

لنختر رقم في الفترة الأول، كي نحدد إشارة المشتقة الثانية

نختار الرقم صفر ونعوض في المشتقة الثانية

$$F''(0) = 0 - 4 = -4$$

أي أنها سالبة، نضع في الخانة الأولى-----

ثانيان لنختر رقم يقع في الفترة الثانية ، مثلا 9

ونعوض في المشتة الثانية ، لنعلم إذا كان التقعر لأعلى أو لأسفل

$$F''(9) = 6(9) - 4 = 50$$

أي أنها موجبة، نضع في الخانة الثانية (الجدول) +++++

الآن لتحديد نقاط الانقلاب ، يجب أن نساوي المشتقة بصفر ، هذا الشرط الأول

والشرط الثاني هو أن يكون هناك تغير في التقعر من أسفل إلى أعلى أو بالعكس

والشرطين محققين عندنا رقم بعد أن ساوينا الدالة بصفر ، وهناك تغير في التقعر ...

إذن $x = \frac{2}{3}$ هي نقطة انقلاب

وفترة التقعر لأسفل و لأعلى واضحتين من جدول المشتقة الثانية

فترة التقعر لأسفل $(-\infty, \frac{2}{3})$

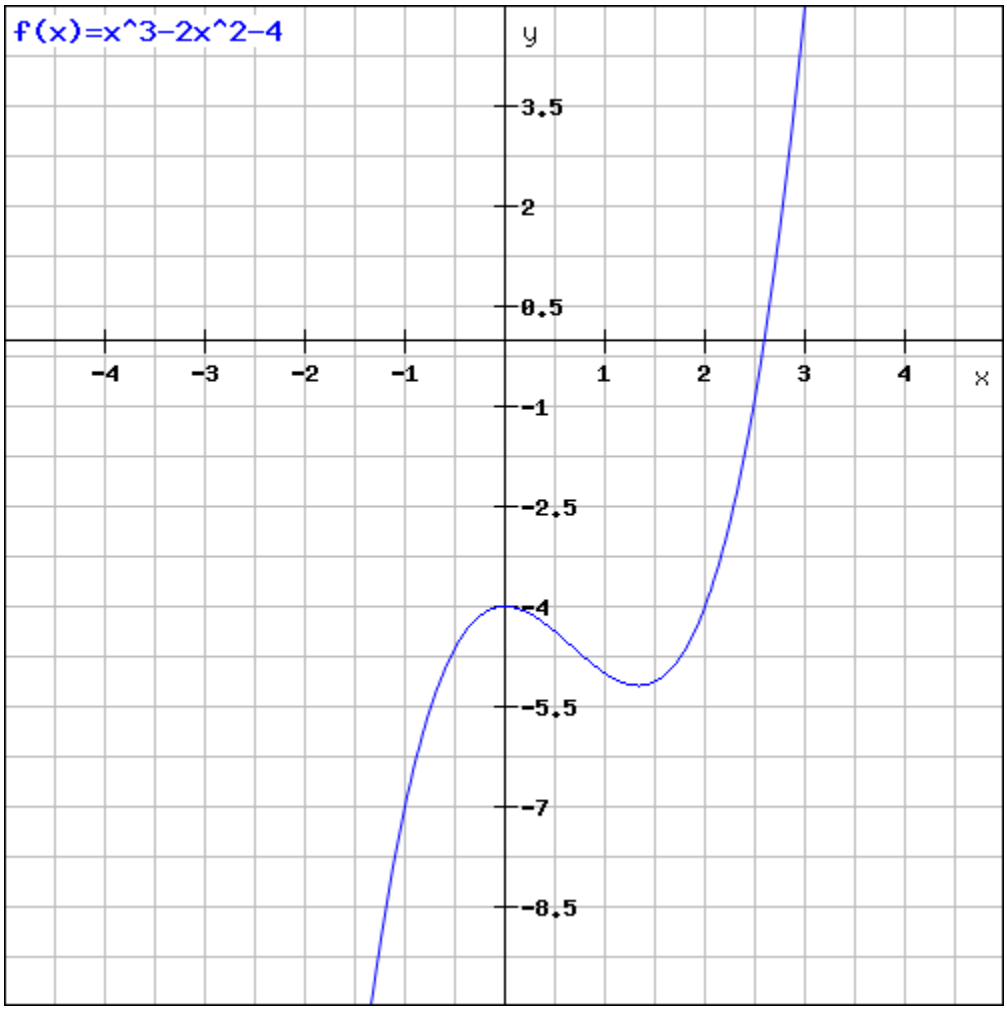
فترة التقعر لأعلى $(\frac{2}{3}, \infty)$

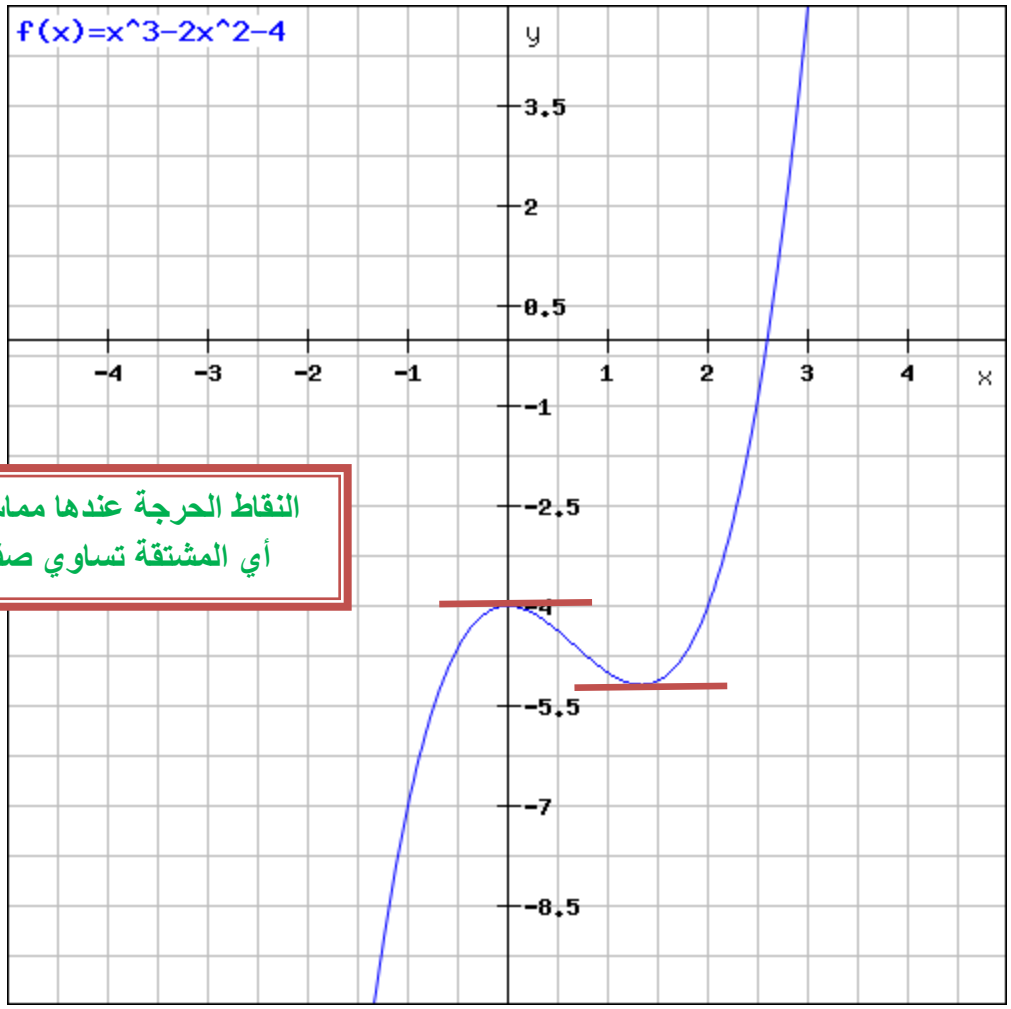
وهذا هو رسم الدالة ، كي تتحققوا من كل ما عملناه

ستروا أن الرسمة تحقق بالضبط عملياتنا الرياضية

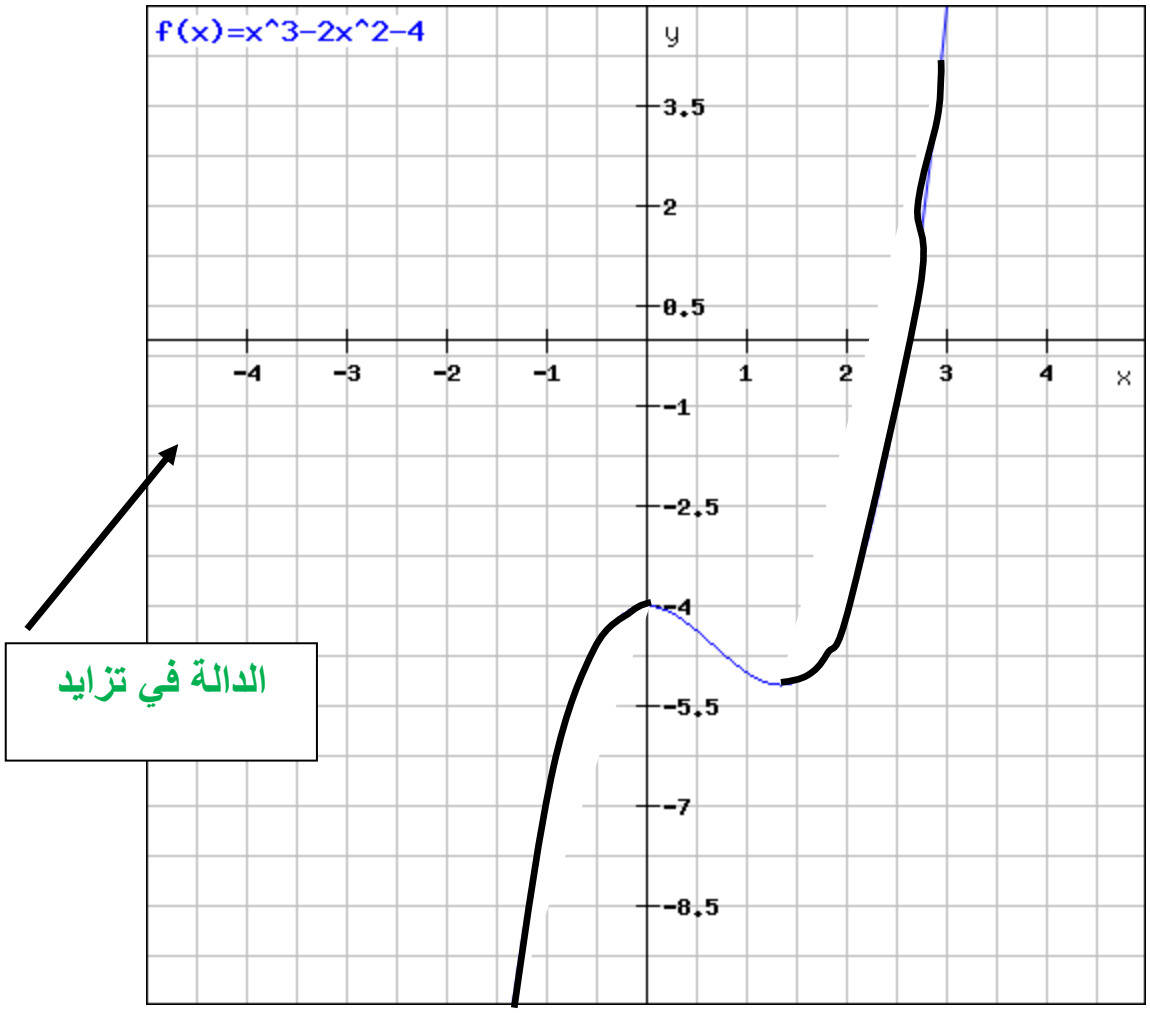
سبحان الله على نعمة العقل

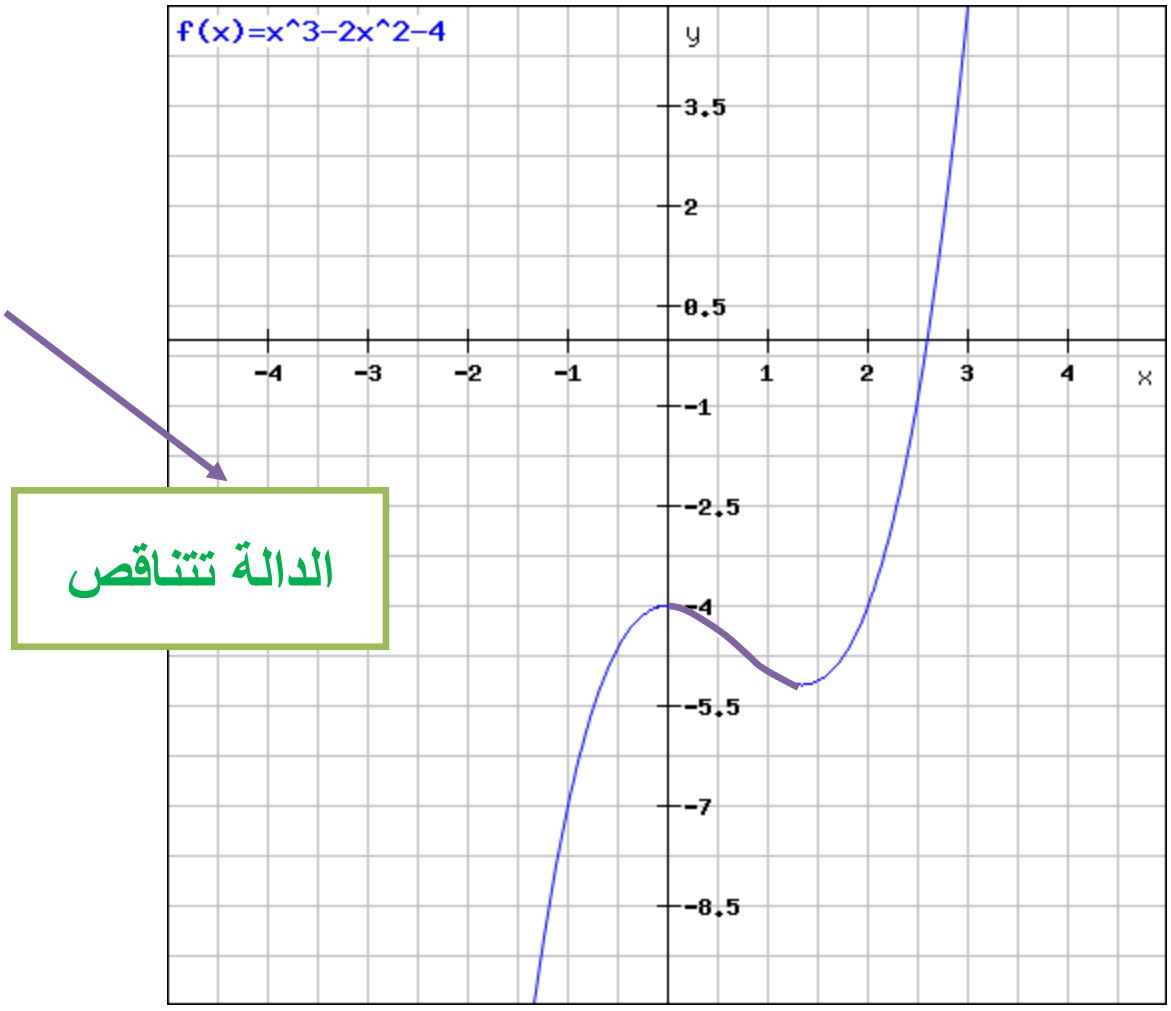
شكرا لك يارب

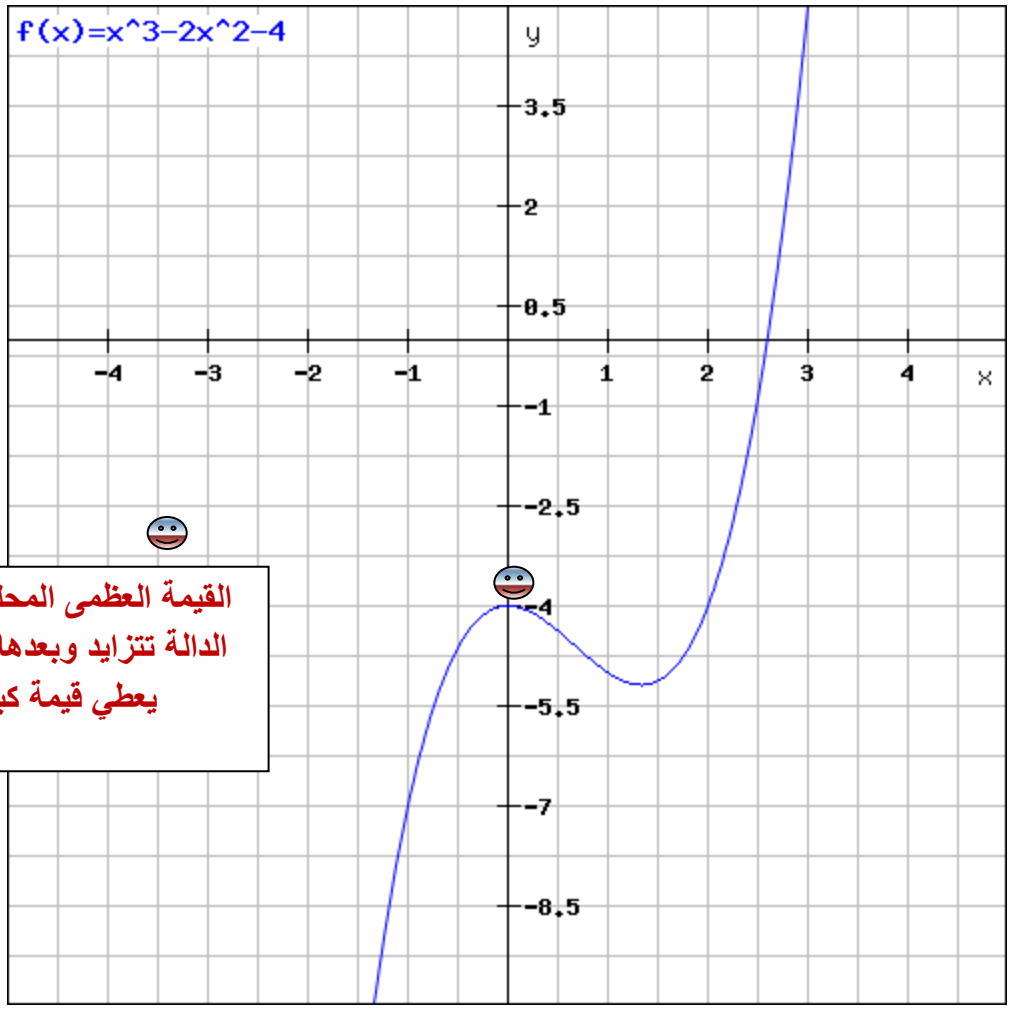




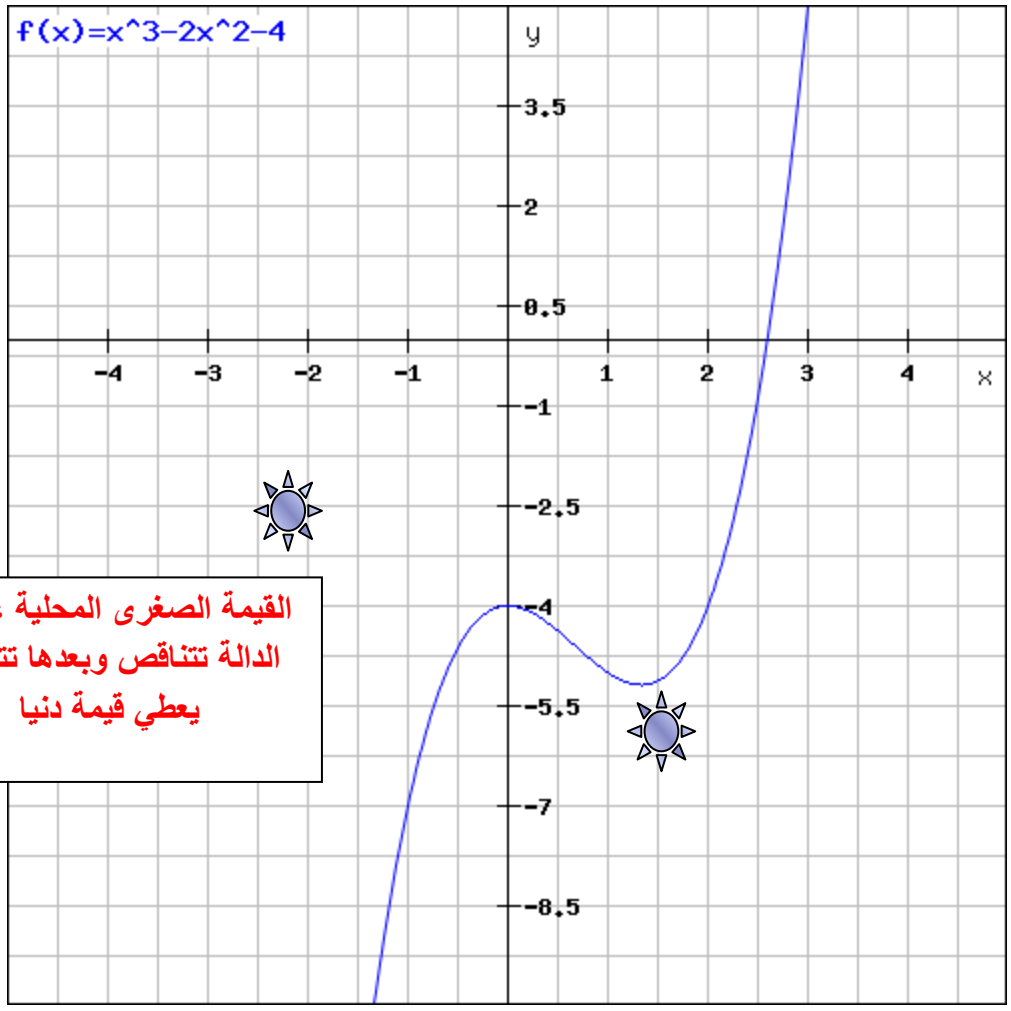
النقاط الحرجة عندها مماس أفقي ،
أي المشتقة تساوي صفر !!!!


f(x)=x^3-2x^2-4
y
x
3.5
2
0.5
-1
-2.5
-4
-5.5
-7
-8.5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
الدالة في تزايد

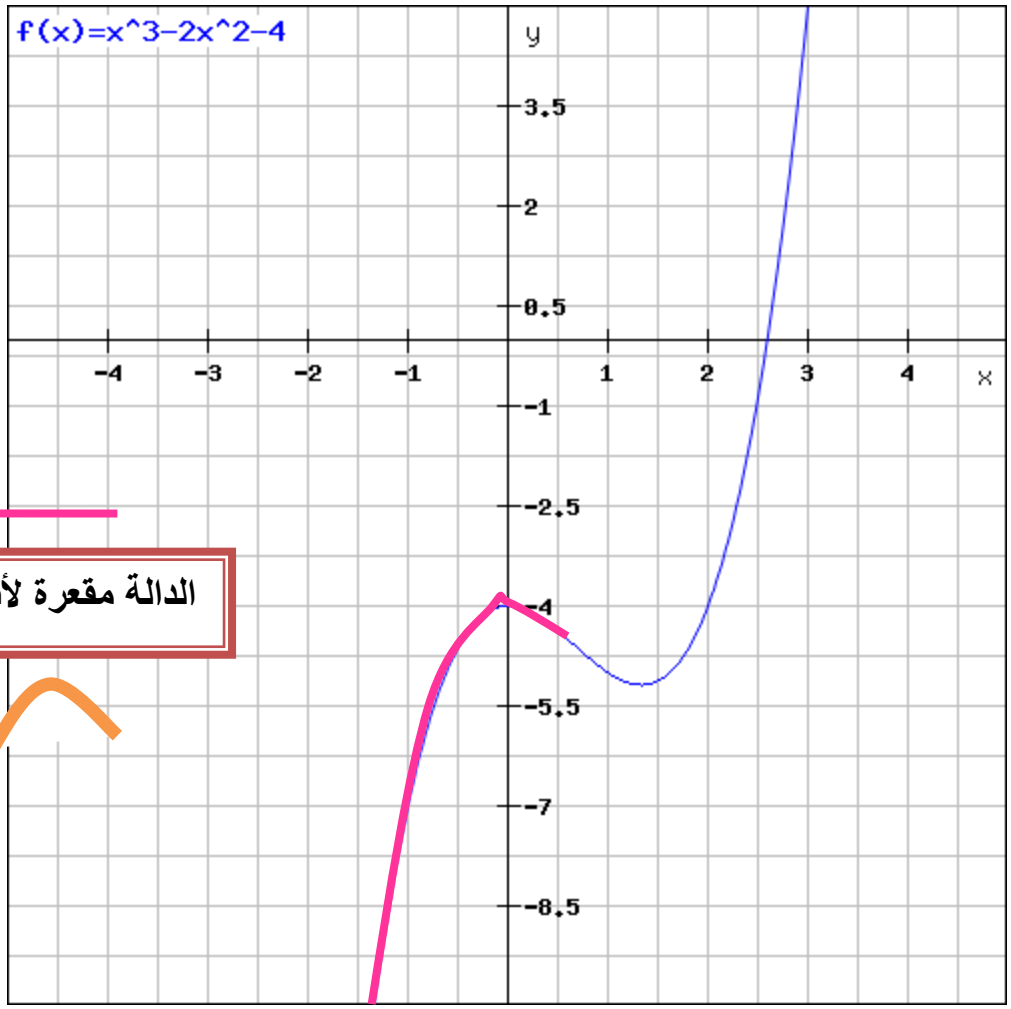

f(x)=x^3-2x^2-4
y
x
3.5
2
0.5
-1
-2.5
-4
-5.5
-7
-8.5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
الدالة تتناقص

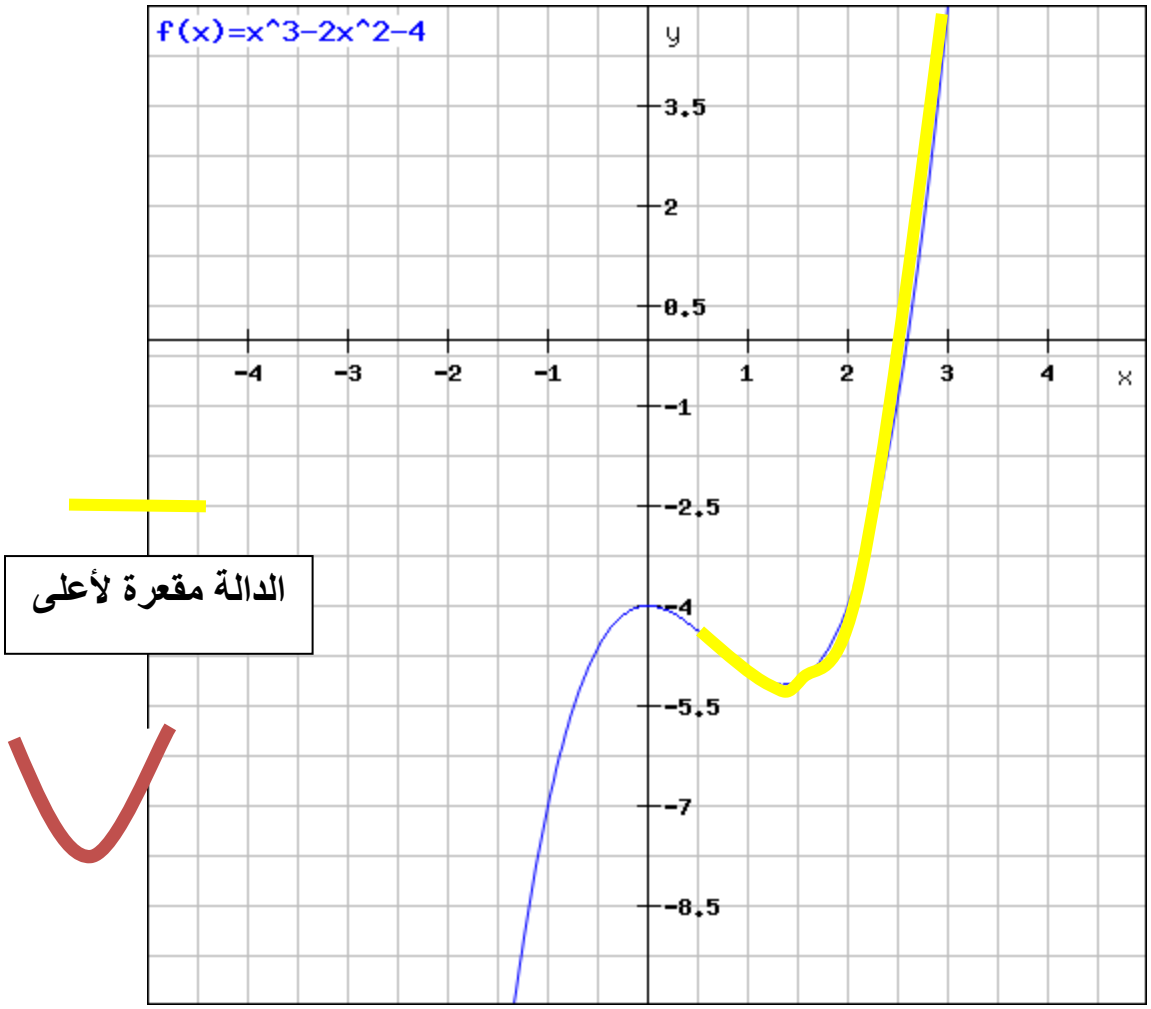


القيمة العظمى المحلية ، قبلها الدالة تتزايد وبعدها تتناقص، يعطي قيمة كبرى

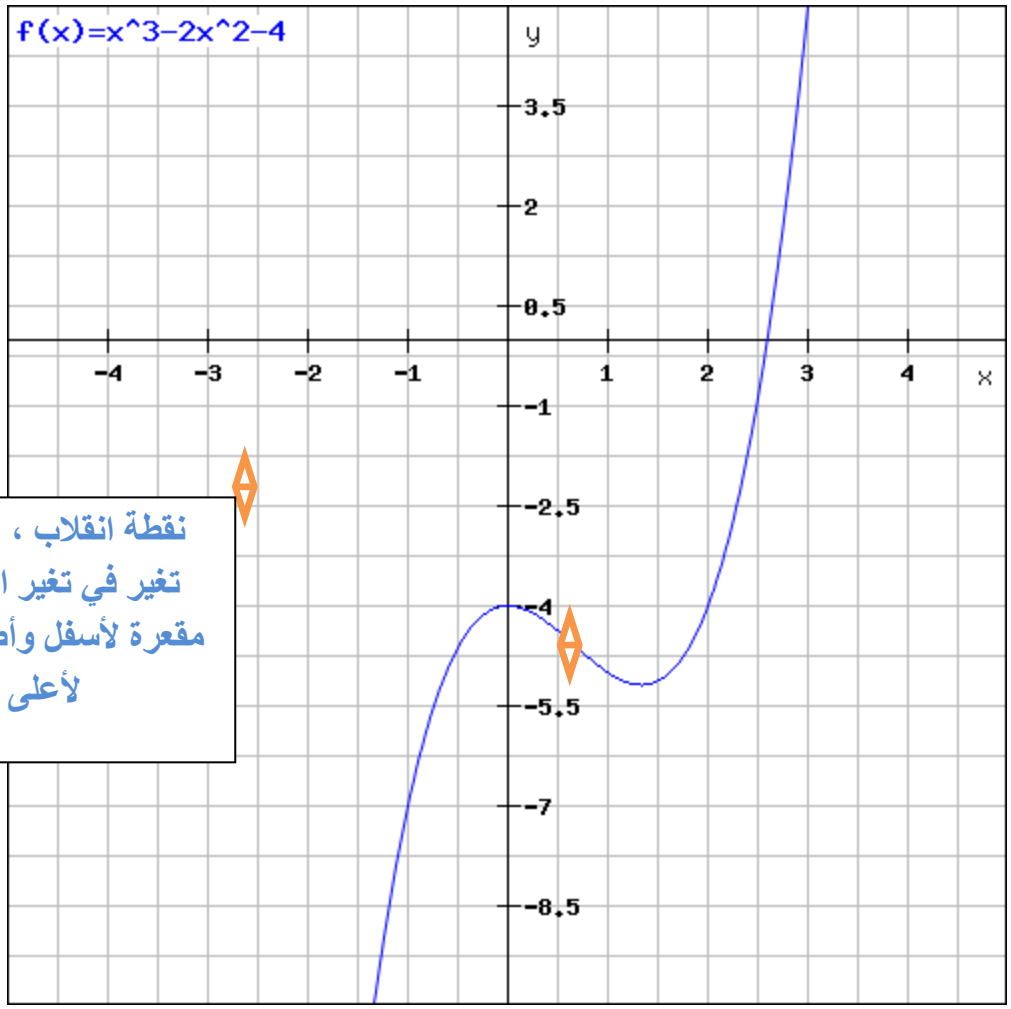


القيمة الصغرى المحلية ، قبلها الدالة تتناقص وبعدها تتزايد، يعطي قيمة دنيا


f(x)=x^3-2x^2-4
y
x
3.5
2
0.5
-1
-2.5
-4
-5.5
-7
-8.5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
الدالة مقعرة لأسفل



الدالة مقعرة لأعلى



نقطة انقلاب ، أصبح عندنا تغير في تغير الدالة، كانت مقعرة لأسفل وأصبحت مقعرة لأعلى !!!

والحمد لله رب العالمين

مع السلامة

استمتعوا مع علم التفاضل والتكامل