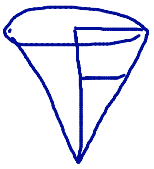
مثال 15 **خزان مياه مخروطي الشكل :** يتدفق الماء من خزان مياه مخروطي الشكل بمعدل 50 m3/min (رأسه لأسفل وقاعدته أفقية) وكان طول نصف قطر قاعدته 45 m وارتفاعه 6 m.

أ –ما سرعة هبوط مستوى سطح الماء عندما يكون عمق المياه 5m ؟

ب ما سرعة تغير نصف قطر سطح الماء عند هذه اللحظة ؟ أعط إجابتك بـــ cm/min .

$\frac{dV}{dt} = -50\ m^3/min$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



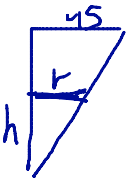
نفس الحل

$\frac{45}{r} = \frac{6}{h}$

$6r = 45h$

$\frac{6r}{6} = \frac{45h}{6}$

$r = \frac{15}{2}h$



مثال 16 خزان ماء على شكل مخروط قاعدته دائرة نصف قطرها 5ft وارتفاعه 12 ft . ملئ الخزان بالماء على ارتفاع 7 ft . يتدفق الماء من الخزان إلى الخارج بمعدل $3\ ft^3$ في الدقيقة. أوجد معدل التغير لعمق الماء في الخزان. بيّن الخطوات التي اتبعتها .

(إرشاد : حجم المخروط هو : $V = 1/3\ Bh$ حيث B هي مساحة القاعدة و h ارتفاع المخروط .)

مثال 17 **نفخ بالون** : بالون كروي نُفخ بغاز الهيليوم بمعدل $100\ \pi\ ft^3/min$.

أ –ما سرعة تزايد نصف قطر البالون عند اللحظة التي يكون فيها طول نصف القطر $5ft$ ؟

ب –ما سرعة تزايد مساحته السطحية عند هذه اللحظة ؟

$\frac{dV}{dt} =$

$\frac{dr}{dt} = ??$

$r =$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{dV}{dt} =$

$A = 4\pi r^2$

$\frac{dA}{dt} =$

مثال 18 **تزايد نقطة مطر**. بفرض أن قطيرة من مياه الضباب على شكل كرة ، وبالشروط التالية تلتقط القطيرة مياها من الندى بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها. أثبت تحت هذه الظروف تزايد نصف قطر القطيرة بمعدل ثابت .

مثال 19 **خزان مياه على شكل نصف كرة.** يتدفق الماء كما هو مبين في الشكل من خزان على شكل نصف كرة قطرها 13 m بمعدل $6\ m^3/min$. أجب عن الأسئلة التالية حيث حجم المياه في الخزان الذي نصف قطره R هو $V = (\pi/3)y^2(3R-y)$ عندما يكون الماء عل عمق y units :

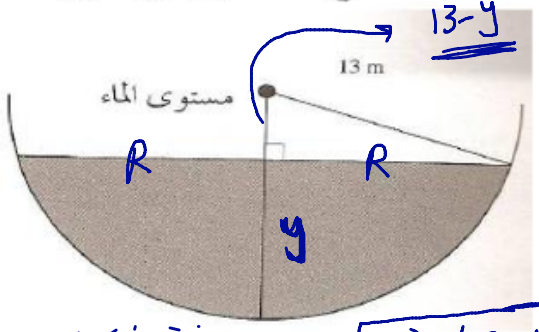
أ –ما معدل تغير (ارتفاع) سطح الماء عندما يكون الماء على عمق 8 m ؟

ب ما طول نصف القطر R من سطح الماء عندما يكون الماء على عمق y m ؟

ج– ما معدل تغير طول نصف القطر عندما يكون الماء على عمق 8 m ؟

$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3} y \frac{dy}{dt}(3R-y) + \frac{\pi}{3}y^2\left(3\frac{dR}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)$

$\frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3} y \frac{dy}{dt}(3R-y) + \pi y^2 \cdot \frac{13-y}{\sqrt{13^2-(13-y)^2}} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{\pi}{3}y^2\frac{dy}{dt}$



$6 = \frac{dy}{dt}\left[\frac{2\pi}{3} \times 8(36-8) + \pi(8)^2\ \frac{5}{12} - \frac{\pi}{3}(8)^2\right]$

$\frac{dy}{dt} = 0.012\ m/min$

$\frac{dR}{dt} = \frac{5}{12} \times 0.012 = 0.005\ m/min$

(فيثاغورث) $R = \sqrt{13^2-(13-y)^2}$

$\frac{dR}{dt} = \frac{-2(13-y)(-1)}{2\sqrt{13^2-(13-y)^2}} \cdot \frac{dy}{dt}$

مثال 20 **تسخين طبق** : عند تسخين طبق دائري من المعدن في الفرن ، يتزايد طول نصف القطر بمعدل 0.01 cm / sec . بأي معدل تتزايد مساحة الطبق عندما يكون طول نصف قطره 50 cm ؟

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} =$

$=$

$r =$

$\frac{dr}{dt} =$

مثال 21 يتغير نصف قطر دائرة بمعدل : $-2/\pi$ m/sec . ما معدل تغير مساحة هذه الدائرة إذا كان نصف قطرها يساوي 10 m ؟

easy

مثال 22 **تغيير الأبعاد في المستطيل** : طولُ المستطيل L يتناقص بمعدل 2 cm / sec عندما يتزايد عرضه w بمعدل 2 cm / sec عندما $L = 12$ cm و $w = 5$ cm . أوجد معدل تغير :

أ –المساحة.

ب المحيط.

ج– طول قطر المستطيل.

د– **أكتب للتعلم.** ما الكميات التي تتناقص؟ وما الكميات التي تتزايد ؟ فسر.

easy

مثال 23 **تغيير أبعاد صندوق على شكل متوازي مستطيلات :** بفرض أن x ، y ، z هي أبعاد صندوق على شكل متوازي مستطيلات وتغير معدلاتها كالآتي :

$dx/dt = 1$ m/sec ، $dy/dt = -2$ m/sec ، $dz/dt = 1$ m/sec

أوجد عند اللحظة التي عندها $x = 4$ ، $y = 3$ ، $z = 2$ معدل التغير في :

أ- حجم الصندوق .

ب- مساحته السطحية .

ج- طول قطره $S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

a) $V = xyz \longrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}yz + \frac{dy}{dt}xz + \frac{dz}{dt}xy$

$\frac{dV}{dt} = (1)(3)(2) + (-2)(4)(2) + (1)(3)(4)$

$\frac{dV}{dt} = 6 - 16 + 12 = 2 \ m^3/s$

b) $A = 2(xy + yz + xz) \longrightarrow \frac{dA}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt}z + y\frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt}z + x\frac{dz}{dt}\right)$

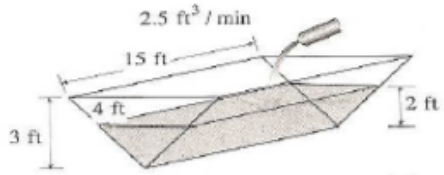
$\frac{dA}{dt} = 2(-1\times3 + 4\times-2 + (-2)\times1 + 3\times1 + 1\times2 + 4\times1) = 2(-3 - 8 - 4 + 3 + 2 + 4) = -12 \ m^2/s$

c) $\frac{dS}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \square$ m/s

---

مثال 24 **ملء حوض :** حوض طوله 15 ft عند مقطعه العلوي ، وعرضه عند ذلك المقطع 4 ft كما مبين بالشكل .النهايات هي مثلثات متساوية الأضلاع ارتفاع كل منها 3 ft ، يُسكب الماء في الحوض بمعدل $2.5 \ ft^3/miin$.ما سرعة ارتفاع سطح الماء في الحوض عندما يكون ارتفاعه 2 ft ؟

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع



$V = BH = B \times 15 = 15B$

$V = 15\left(\frac{1}{2}bh\right) = 15 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}h \times h$

$V = 10h^2$

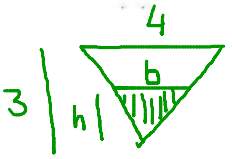
$\frac{dV}{dt} = 20h \cdot \frac{dh}{dt}$

$2.5 = 20 \times 2 \times \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{2.5}{40} = \frac{1}{16}$ ft/min

h = ارتفاع المثلث

b = قاعدة المثلث



من التشابه

$\frac{b}{4} = \frac{h}{3}$

$b = \frac{4}{3}h$

مثال 25 **الأقطار** : إذا كانت z،y،x أطوال أحرف صندوق على شكل متوازي مستطيلات وطول قطر الصندوق $S = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ كيف ترتبط ds/dt بـ dx/dt و dy/dt و dz/dt ؟

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 2z\frac{dz}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

مثال 26 **المساحة** : إذا كانت a و b طولي ضلعين من مثلث يحصران بينهما زاوية قياسها θ . إذا كانت مساحة المثلث $A = (1/2)ab \sin\theta$. كيف ترتبط بـ dA/dt و da/dt و db/dt و $d\theta/dt$ ؟

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{da}{dt}b\sin\theta + \frac{1}{2}a\frac{db}{dt}\sin\theta + \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

مثال 27 **عمل ثقب في أسطوانة.** يريد ميكانيكي السيارات عمل ثقب اسطواني بعمق 6 in حتى تكون مناسبة لدخول مكبس حديد ، والماكينة التي يستخدمها تجعل نصف قطر الأسطوانة يتزايد بمقدار واحد من الألف من البوصة كل 3 دقائق. بأي سرعة يتزايد فيها حجم الأسطوانة إذا كان قطر الثقب 3.800 in ؟

$\frac{dr}{dt} = \frac{0.001}{3}$ in/min $\quad \frac{dV}{dt} = ? \quad r = 3.8$ in $\quad h = 6$ in ثابت

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2(6) = 6\pi r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = 12\pi r\frac{dr}{dt} = 12\pi(3.8)\left(\frac{0.001}{3}\right) = \quad \text{in}^3/\text{min}$$

مثال 28 **حركة جسيم.** يتحرك جسيم في المستوى الإحداثي بحيث تكون سرعته في كل من الاتجاهين السيني والصادي على النحو التالي :

$dx/dt = -1$ m/sec

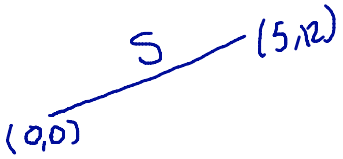
$dy/dt = -5$ m/sec

ما السرعة التي يقترب بها الجسيم من نقطة الأصل عندما يكون في النقطة (5 , 12) ؟

$$S = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$S = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$S = \sqrt{x^2+y^2}$$



$$\frac{dS}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2(5)(-1)+2(12)(-5)}{2\sqrt{(5)^2+(12)^2}}$$

$$= \frac{-10-120}{2\times 13} = \frac{-130}{2\times 13} = -5 \text{ m/s}$$