استراتيجية حل مسائل المعدّلات المرتبطة

1 - تقرأ المسألة قراءة دقيقة ويرسم مخطط لها ويحدد المتغيرات و الثوابت فيها ويرمز لكل منها برمز ونحدد المعلوم والمطلوب من المعدلات الزمنية أو المتغيرات.

2 - نعين العلاقة الرياضية التي تربط بين المتغيرات.

3 - إذا احتوت العلاقة على أكثر من متغيرين نجعل العلاقة السابقة في صورة علاقة بين متغيرات جميع معدلاتها و متغيراتها معلومة ماعدا المطلوب إيجاده عن طريقة التعويض عن المتغيرات بدلالة بعضها البعض .

4 - نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة للزمن للحصول على علاقة تربط بين المعلوم من المعدلات و المتغيرات و المطلوب.

5 - نعوض بالقيم المعلومة في الخطوة السابقة و نوجد المطلوب.

تمهيد

1 **إيجاد معادلات معدل مرتبطة :** افترض أن نصف القطر ((r)) والارتفاع ((h))

لمخروط عبارة عن دالتين قابلتين للاشتقاق في t ، وأن V حجم المخروط. أوجد المعادلة التي تربط

$\frac{dV}{dt}$ و $\frac{dr}{dt}$ و $\frac{dh}{dt}$

---

2 **الحجم :** يرتبط طول نصف القطر r والحجم V والارتفاع h لأسطوانة دائرية قائمة

بالمعادلة $V = \pi r^2 h$.

أ- كيف يرتبط كل من dV/dt و dh/dt إذا كانت r ثابتة ؟

ب- كيف يرتبط كل من dV/dt و dr/dt إذا كانت h ثابتة ؟

ج- كيف ترتبط dV/dt بكل من dr/dt و dh/dt إذا لم تكن كل من r و h ثوابت ؟

$V = \pi r^2 h \rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

b) $\frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} h$

c) $\frac{dV}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} h + \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

3 **مساحة** : طول نصف القطر r والمساحة A لدائرة يرتبطان بالمعادلة $A = \pi r^2$.

أُكتب المعادلة التي تربط dA/dt و dr/dt .

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

---

4 **مساحة السطح** : طول نصف القطر r والمساحة السطحية S لكرة يرتبطان بحسب المعادلة $S = 4\pi r^2$. أكتب المعادلة التي تربط كلاً من dS/dt و dr/dt .

---

5 **الطاقة الكهربية** : الطاقة P (بالواط) لتيار كهربي ترتبط بالمقاومة R (بالأوم)

في الدائرة وشدة التيار I (بالأمبير) حسب المعادلة : $P = RI^2$.

أ- كيف ترتبطُ dP/dt بـــ dR/dt و dI/dt .

ب- كيف يرتبط كل من dR/dt و dI/dt إذا كانت P ثابتة ؟

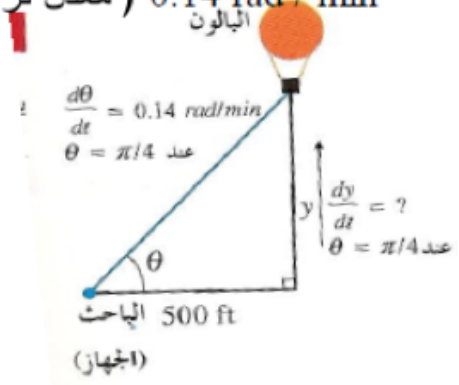
مثال 6 : **مكعب يزداد حجمه بالحرارة بمعدل $3\ cm^3$ جد معدل الزيادة في طول ضلع المكعب عندما يكون هذا الطول $= 6\ cm$ ؟**

$$V = L^3 \longrightarrow \frac{dV}{dt} = 3L^2 \frac{dL}{dt}$$

$$3 = 3(6)^2 \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{36}\ cm/s$$

مثال 7 **بالون آخذ في الارتفاع :** بالون مملؤ بالهواء الساخن يرتفع عمودياً لأعلى من مستوى معين ، ويتتبع حركة البالون جهاز لإيجاد موقعه على بعد 500 ft من نقطة انطلاق البالون. وفي اللحظة التي كانت فيها زاوية ارتفاع البالون من الجهاز هي $\pi/4$ ، كانت الزاوية تزداد بمعدل 0.14 rad / min (معدل تزايد الزاوية). كم كانت سرعة ارتفاع البالون عند هذه اللحظة ؟



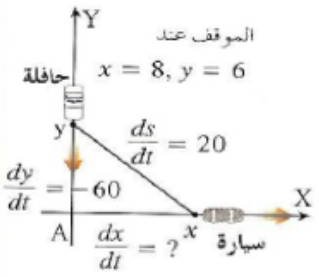
$$\tan\theta = \frac{y}{500} \qquad \sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{500}\frac{dy}{dt}$$

$$\sec^2 45 \times 0.14 = \frac{1}{500}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 500 \times \left(\frac{1}{\cos 45}\right)^2 \times 0.14$$

$$= 140 \text{ ft/min}$$

مثال 8 **مطاردة على الطريق السريع :** تقع محطة A عند تقاطع طريقين متعامدين . تسير حافلة على أحد الطريقين بسرعة 60 mi/h باتجاه المحطة A ، وفي الوقت نفسه تسير سيارة على الطريق الآخر مبتعدة عن المحطة A . وفي اللحظة التي كانت المسافة بين السيارة والمحطة 8 mi ، والمسافة بين الحافلة والمحطة 6 mi ، كانت المسافة بين السارة والحافلة تتغير بمعدل 20 mi/h . أوجد سرعة السيارة في تلك اللحظة .



مثال 9 **مراقبة الطائرات** : طائرة تطير على ارتفاع ثابت قدره 7 mi . وتمر مباشرة فوق رادار كما هو مبين بالشكل ، عندما كانت الطائرة على بعد 10 mi من الرادار (s = 10) . بيّن أن المسافة s تتغير بمعدل 300 mph . ما سرعة الطائرة عند هذه اللحظة ؟

$s^2 = x^2 + 7^2$

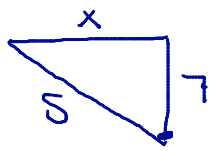
$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$100 = x^2 + 49$

$x^2 = 51$

$x = \sqrt{51}$

$\frac{dx}{dt}$?



$10(300) = \sqrt{51}\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = 422.5$ mi/h

مثال 10 **انزلاق سلم** : سلم طوله 13 ft موضوع أحد طرفيه على جدار منزل ، والطرف الآخر موضوع على الأرض ، يتحرك بعيداً عن الحائط بمعدل 5 ft/sec عندما كان هذا الطرف على بعد 12 ft من المنزل .

$\frac{dx}{dt}$ x

أ – ما سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم على الحائط عند تلك اللحظة ؟ $\frac{dy}{dt}$

ب – ما معدل تغير مساحة المثلث الذي يتكون من السلم والحائط والأرض عند تلك اللحظة ؟ $\frac{dA}{dt}$

ج – ما معدل تغير الزاوية θ التي بين السلم والأرض عند تلك اللحظة . $\frac{d\theta}{dt}$

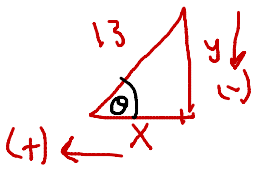
a) $x^2 + y^2 = 13^2$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$12^2 + y^2 = 13^2$

$y = 5$

$12(5) + 5\frac{dy}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = -12$ ft/s



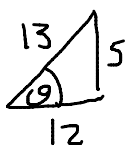
b) $A = \frac{1}{2}xy \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}y + \frac{1}{2}x\frac{dy}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(5)(5) + \frac{1}{2}(12)(-12) = -59.5$ ft²/s

c) $\sin\theta = \frac{y}{13}$

$\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{13}\frac{dy}{dt}$

$\left(\frac{12}{13}\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{13}(-12)$



$\frac{d\theta}{dt} = -1$ rad/s

مثال 11 **طيران الطائرة الورقية :** كانت طائرة محمد الورقية على ارتفاع 300 ft ، قذفتها الريح أفقياً بمعدل 25 ft/sec . ما السرعة التي يجب أن يترك فيها محمد خيط الطائرة عندما تكون على بعد 500 ft منه ؟

easy

مثال 12 **تغيير الجهد الكهربي :** الجهد الكهربي V (بالفولت) وشدة التيار I (بالأمبير) والمقاومة R (بالأوم) لتيار كهربي كما في الدائرة الكهربية المبينة يُعطى بالعلاقة V= IR . بفرض أن V تتزايد بمعدل 1 volt/sec ، في حين I تتناقص بمعدل 1/3 amp/sec والزمن t مقيسٌ بالثواني.

أ –ما قيمة dV/dt ؟

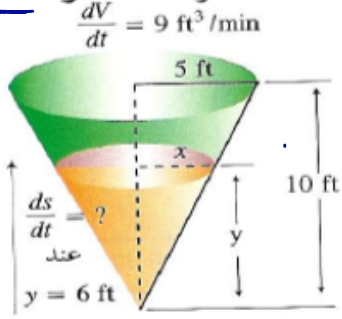
ب –ما قيمة dI/dt ؟

ج– أُكتب المعادلة التي تربط بين dR/dt و dV/dt و dI/dt .

د– **أُكتب للتعلم :** أوجد المعدل الذي عنده R تتغير عندما R تتزايد أو تتناقص في اللحظة التي تكون فيها V = 12 و I = 2 . فسر .

easy

مثال 13 **ملء خزان مخروطي الشكل** : تتدفق المياه إلى داخل خزان مخروطي الشكل بسرعة $9\ ft^3/min$. الخزان موضوع بحيث يكون رأسه إلى أسفل . إذا كان ارتفاع الخزان $10\ ft$ ونصف قطر قاعدته $5ft$ ، ما السرعة التي يرتفع بها الماء عندما يكون عمق الماء $6\ ft$ ؟



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

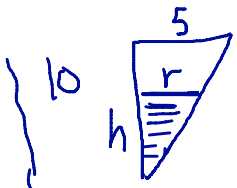
$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{4}h^3$

$V = \frac{1}{12}\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$9 = \frac{1}{4}\pi(6)^2 \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{36}{36\pi} = \frac{1}{\pi}$ ft/min



$\frac{h}{10} = \frac{r}{5}$

$r = \frac{1}{2}h$

مثال 14 **تزايد كومة رمل** : يتساقط الرمل بمعدل $10mi3/min$ على قمة كومة مخروطية من الرمل. إذا كان ارتفاع الكومة $3/8$ من طول قطر القاعدة ، ما سرعة :

أ -الارتفاع .

ب -تغير نصف القطر عندما يكون ارتفاع الكومة $4\ mi$ ؟ أعط اجابتك بـ cm/min .

$\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$V = \frac{1}{3}\pi(\frac{4}{3}h)^2 \cdot h = \frac{16}{27}\pi h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{16}{9}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \longrightarrow 10 = \frac{16}{9}\pi(4)^2\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{90}{256\pi}$ m/min

$h = \frac{3}{8}(2r)$ القطر

$h = \frac{3}{4}r$

$r = 4/3\,h$

$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{dh}{dt}$

$= \frac{4}{3}(\frac{90}{256\pi}) = ?$