رياضيات السادس العلمي

Mathematics

الفصل الثاني

القطوع المخروطية

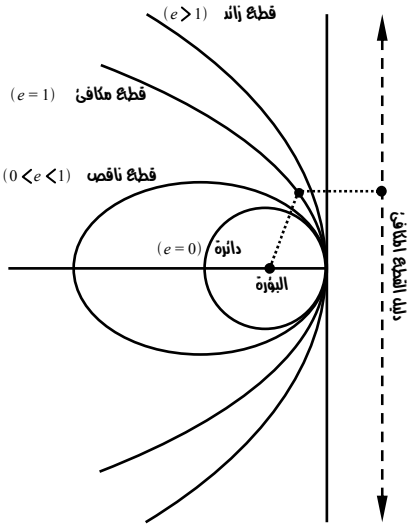
إعداد
مدرس الرياضيات
عرفان محمد

القطوع المخروطية

تعريف القطع المخروطي :

هو شكل هندسي يتكون من مجموعة النقط التي نسبة بعد كل منها عن نقطة معلومة $F(x,y)$
إلى بعدها عن مستقيم معلوم $(ax+by+c=0)$ **تساوي عدداً ثابتاً** (e) **:**

1) $F(x,y)$ ⟶ **البؤرة**
2) $ax+by+c=0$ ⟶ **معادلة الدليل**
3) e ⟶ **الاختلاف المركزي** $\left(e=\frac{c}{a} \right)$



ملاحظات :

1) **إذا كانت** $(e=1)$ **يسمى القطع بـ(القطع المكافئ)**
2) **إذا كانت** $(e>1)$ **يسمى القطع بـ(القطع الزائد)**
3) **إذا كانت** $(0<e<1)$ **يسمى القطع بـ(القطع الناقص)**

المعادلة العامة للقطع المخروطي :

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2.\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

ملاحظات :

1) **إذا كان الإحداثي السيني للنقطة صفراً** $(0\ ,\ y)$ **فسوف نسميها نقطة صادية**
2) **إذا كان الإحداثي الصادي للنقطة صفراً** $(x\ ,\ 0)$ **فسوف نسميها نقطة سينية**
3) **كل مستقيم يوازي المحور السيني** $(x\text{-axis})$ **معادلته تكون** (ما يقطعه من المحور $=y$)
4) **كل مستقيم يوازي المحور الصادي** $(y\text{-axis})$ **معادلته تكون** (ما يقطعه من المحور $=x$)

القطع المكافئ : Parabola

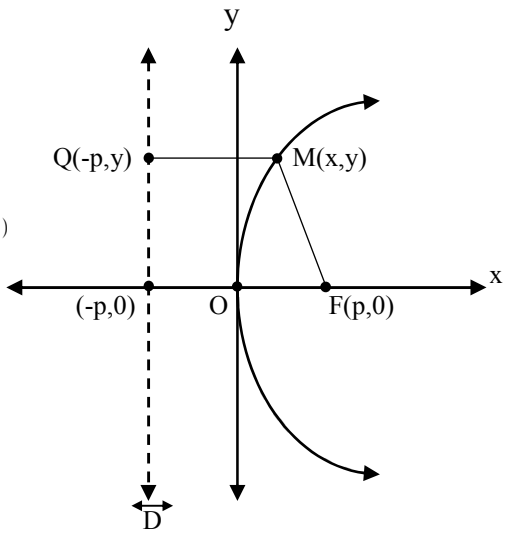
هو المحل الهندسي للنقط (x , y) **التي يكون بُعدها عن نقطة ثابتة** (**البؤرة** F)
يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسمى (**الدليل** D)

للقطع المكافئ حالتان هما :

أولاً : البؤرة تقع على (x-axis) **والرأس هو نقطة الأصل :**

a) **الفتحة نحو اليمين :**

$\frac{MF}{MQ} = e = 1$ (الاختلاف المركزي)



$\Rightarrow \quad MF = MQ$

$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{y^2 = 4px}$ (معادلة القطع المكافئ)

$\boxed{x = -p}$ (معادلة الدليل)

---

b) **الفتحة نحو اليسار :**

$\boxed{y^2 = -4px}$ (معادلة القطع المكافئ)

$\boxed{x = p}$ (معادلة الدليل)

ثانياً : البؤرة تقع على (y-axis) **والرأس هو نقطة الأصل :**

a) **الفتحة نحو الأعلى :**

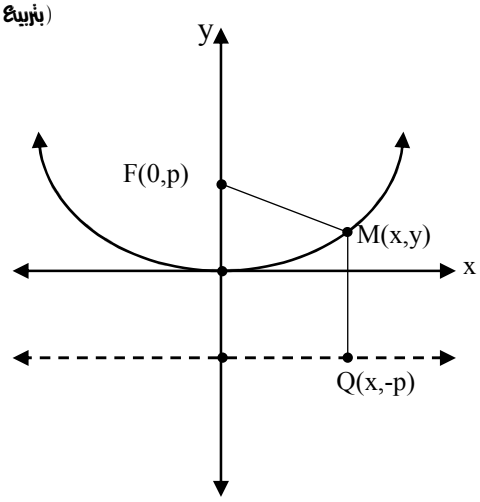
$MF = MQ$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$

$\Rightarrow$ $x^2 = 4py$ (معادلة القطع المكافئ)

$y = -p$ (معادلة الدليل)



---

b) **الفتحة نحو الأسفل :**

$x^2 = -4py$ (معادلة القطع المكافئ)

$y = p$ (معادلة الدليل)

جدول نظهر فيه جميع حالات القطع المكافئ :

فتحة القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
يمين	x	$x = -p$	$F(p, 0)$	$y^2 = 4px$
يسار	x	$x = p$	$F(-p, 0)$	$y^2 = -4px$
اعلى	y	$y = -p$	$F(0, p)$	$x^2 = 4py$
اسفل	y	$y = p$	$F(0, -p)$	$x^2 = -4py$

ملاحظات :

1) **المسافة بين البؤرة والدليل =** $2p$
2) **إشارة البؤرة عكس إشارة الدليل دائماً**
3) **إذا كانت البؤرة سينية فمعادلة المحور تكون** ($y = 0$)
4) **إذا كانت البؤرة صادية فمعادلة المحور تكون** ($x = 0$)

مثال : باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (-5 , 0) **ورأسه نقطة الأصل**

الحل :

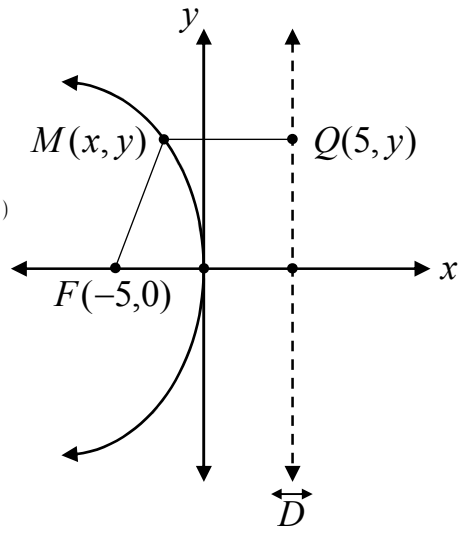
$F(-5,0)$ (الفتحة نحو اليسار)

$MF = MQ$

$\sqrt{(x+5)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(y-y)^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2+10x+25+y^2 = x^2-10x+25$

$\Rightarrow \quad y^2 = -20x$



مثال : حل المثال السابق بدون استخدام التعريف

الحل :

$F(-5,0) \quad \Rightarrow \quad p = 5$

الفتحة نحو اليسار $\Leftarrow$ **معادلة القطع هو :**

$y^2 = -4px$

$\Rightarrow y^2 = -4(5)x$

$\Rightarrow y^2 = -20x$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات ورأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(-\sqrt{2},\frac{1}{2})$

الحل :

∵ البؤرة صادية ← نلاحظ إشارة الإحداثي الصادي للنقطة والتي هي موجبة

∴ الفتحة تكون نحو الأعلى ⇐ معادلة القطع هي :

$$x^2 = 4py$$

$(-\sqrt{2},\frac{1}{2})$ تنتمي للقطع ⇐ تحقق معادلة القطع :

$$(-\sqrt{2})^2 = 4p(\frac{1}{2}) \quad \Rightarrow \quad 2 = 2p$$

$$\Rightarrow \quad p = 1$$

فتكون معادلة القطع المكافئ :

$$x^2 = 4y$$

مثال : جد البؤرة والدليل للقطع المكافئ : $3y^2 = 16x - y^2$

الحل :

$$3y^2 + y^2 = 16x$$

$$4y^2 = 16x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x$$

∴ الفتحة نحو اليمين ⇐ المعادلة هي :

$$y^2 = 4px$$

$$\Rightarrow \quad p = 1$$

∴ البؤرة هي $F(1,0)$

معادلة الدليل : $x = -1$

مثال : إذا كانت $x^2 - 2ky = 0$ **تمثل معادلة قطع مكافئ بؤرته** $(0\ ,\ 1)$ **فجد قيمة** (k)

الحل :

البؤرة $(0\ ,\ 1)$ **صادية موجبة** $\Leftarrow$ **الفتحة نحو الأعلى** $\Leftarrow$ **معادلة القطع هي :**

$$x^2 = 4py$$

$$p = 1 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{matrix} x^2 = 4y \\ x^2 = 2ky \end{matrix}\right\rangle \quad 2k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

مثال : جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي لمحور الصادات ودليله يمر بالنقطة $(2\ ,\ -4)$

الحل :

البؤرة صادية $\Leftarrow$ **الدليل يوازي محور السينات ويمر بالنقطة** $(2\ ,\ \underline{-4})$ $\Leftarrow$ **معادلة الدليل هي :**

$$y = -4$$

$$\Rightarrow \quad p = 4$$

الفتحة نحو الأعلى $\Leftarrow$ **معادلة القطع هي :**

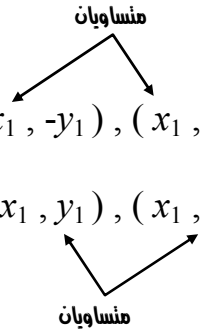
$$x^2 = 4py$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 16y$$

ملاحظات :

1) **إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين** $(x_1\ ,\ y_1)\ ,\ (x_1\ ,\ -y_1)$ **فالبؤرة سينية**

2) **إذا كان القطع المكافئ يمر بالنقطتين** $(x_1\ ,\ y_1)\ ,\ (-x_1\ ,\ y_1)$ **فالبؤرة صادية**



انسحاب المحاور للقطع المكافئ :

درسنا في الأمثلة السابقة القطع المكافئ الذي يكون رأسه نقطة الأصل وبؤرته تقع على إحدى المحاور الإحداثية (السينية أو الصادية) ، والآن سوف ندرس القطع المكافئ بعد انسحابه إلى جهة معينة وسوف نرمز إلى رأس القطع بـ (h,k) وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

فتحة القطع	المحور الموازي	البؤرة	معادلة الدليل	معادلة المحور	معادلة القطع
يمين	x	$\overline{F}(p+h\ ,\ k)$	$x = -p+h$	$y = k$	$(y - k)^2 = 4p\ (x - h)$
يسار	x	$\overline{F}(-p+h\ ,\ k)$	$x = p+h$	$y = k$	$(y - k)^2 = -4p\ (x - h)$
أعلى	y	$\overline{F}(h\ ,\ p+k)$	$y = -p+k$	$x = h$	$(x - h)^2 = 4p\ (y - k)$
أسفل	y	$\overline{F}(h\ ,\ -p+k)$	$y = p+k$	$x = h$	$(x - h)^2 = -4p\ (y - k)$

مثال : جد الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافئ :

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

الحل :

الفتحة نحو اليمين :

$$(y-k)^2 = 4(x-h)$$

$$h = 2 \qquad k = -1 \qquad 4p = 4 \ \Rightarrow \ p = 1$$

الرأس : $(h,k) = (2,-1)$

البؤرة : $\overline{F}(p+h,k) = \overline{F}(3,-1)$

معادلة المحور : $y = -1$

معادلة الدليل : $x = -p+h \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

ملاحظة : في بعض الحالات نحتاج إلى التحويل لصيغة المربع الكامل لجعل المقارنة ممكنة مع معادلة القطع :

فإذا كانت المعادلة ($x^2 + bx = 0$) **فنضيف للطرفين** (**مربع نصف معامل** x) **أي** $(\frac{b}{2})^2$

ولا يصح هذا القانون إلا إذا كان (**معامل** x^2 = 1)

مثلاً :

1) $x^2 + 4x + 2y = 0$

$x^2 + 4x = -2y$

$x^2 + 4x + 4 = -2y + 4$

$(x+2)^2 = -2(y-2)$

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$

$h = -2 \qquad k = 2 \qquad -4p = -2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

---

2) $3x^2 - 24x = 12y \qquad \} \div 3$

$x^2 - 8x = 4y$

$x^2 - 8x + 16 = 4y + 16$

$(x-4)^2 = 4(y+4)$

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$h = 4 \qquad k = -4 \qquad 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

مثال : جد إحداثي الرأس والبؤرة ومعادلة محور القطع ومعادلة الدليل للقطع المكافئ :

$$y^2+8y-x+17=0$$

الحل :

$$y^2+8y=x-17$$
$$y^2+8y+(16)=x-17+(16)$$
$$(y+4)^2=(x-1)$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

$$h=1 \qquad k=-4 \qquad 4p=1 \Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

الرأس : $(h,k)=(1,-4)$

البؤرة : $\overline{F}(p+h,k) = \overline{F}(\frac{1}{4}+1,-4) = \overline{F}(\frac{5}{4},-4)$

معادلة المحور :

$$y=k$$
$$\Rightarrow \quad y=-4$$

معادلة الدليل :

$$x=-p+h$$
$$\Rightarrow \quad x=-\frac{1}{4}+1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3}{4}$$

ملاحظة : يمكننا استنتاج **معادلة المحور** من الجزء الذي فيه **تربيع** في المعادلة ، كما في الأمثلة أدناه :

$$\underline{(y-5)}^2=6(x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y=5$$

$$\underline{(x+2)}^2=3(y-1) \qquad \Rightarrow \qquad x=-2$$

$$\underline{x}^2=12y \qquad \Rightarrow \qquad x=0$$

$$\underline{y}^2=-4x \qquad \Rightarrow \qquad y=0$$

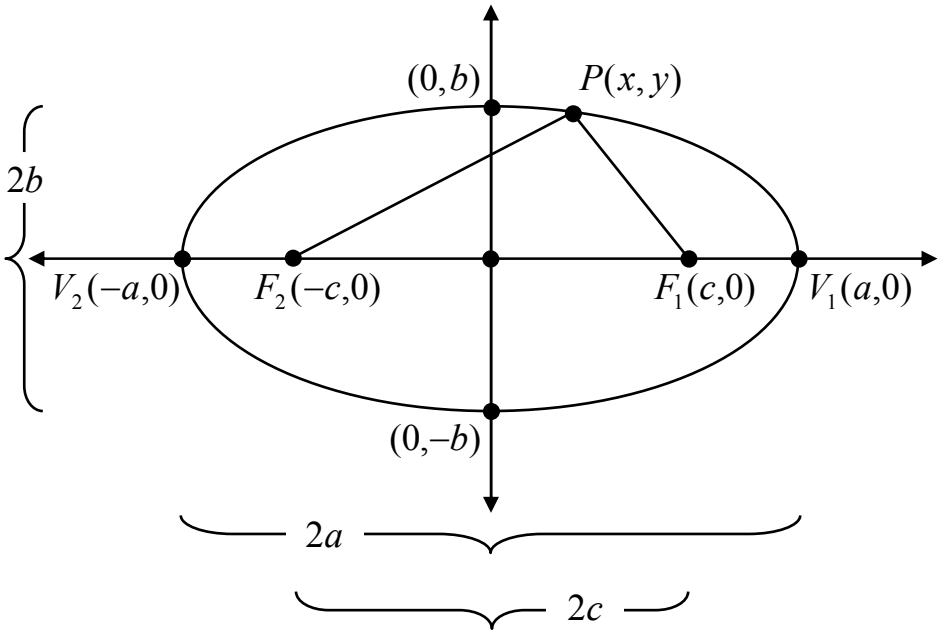
القطع الناقص : Ellipse

هو مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدداً ثابتاً $(2a)$

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

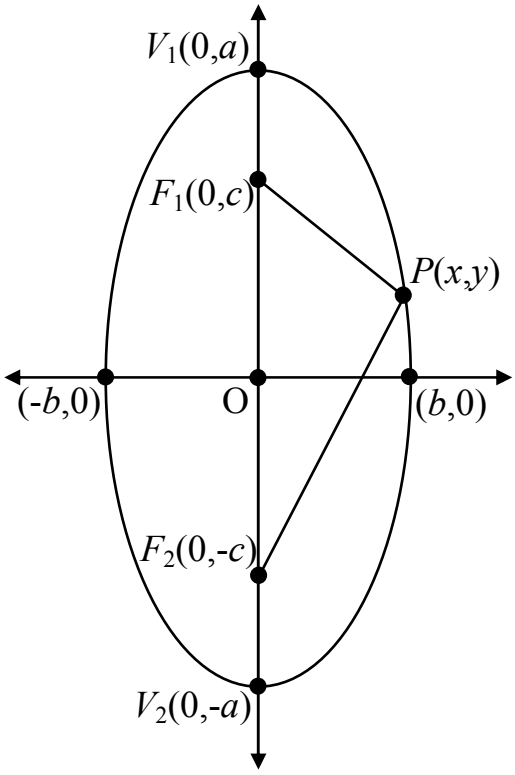
البؤرتان على المحور السيني والمركز نقطة الأصل $O(0,0)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

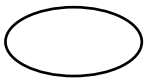
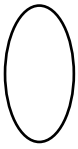


البؤرتان على المحور الصادي والمركز نقطة الأصل $O(0,0)$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



جدول يبين مفردات القطع الناقص في الحالتين :

القطع الناقص	البؤرتان	الراسان	القطبان	المعـــادلة
	$F_1\ (c\ ,\ 0)$ $F_2\ (-c\ ,\ 0)$	$V_1(a,0)$ $V_2(-a,0)$	$(0,b)$ $(0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
	$F_1\ (0\ ,\ c)$ $F_2\ (0\ ,\ -c)$	$V_1(0,a)$ $V_2(0,-a)$	$(b,0)$ $(-b,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

خواص مشتركة :

1) $a \succ b,c \quad \Leftarrow \quad a^2=b^2+c^2 \quad \Leftarrow \quad \boxed{c^2=a^2-b^2}$

2) طول المحور الكبير = $2a$ (العدد الثابت)

3) طول المحور الصغير = $2b$

4) المسافة بين البؤرتين = $2c$ (البعد البؤري)

5) مساحة القطع الناقص : (وحدة مربعة $A=ab\pi$)

6) محيط القطع الناقص : ($\pi=\frac{22}{7}$: $P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$)

7) الاختلاف المركزي : ($0 \prec e \prec 1$) $\quad e=\frac{c}{a} \quad \prec 1$

ملاحظات :

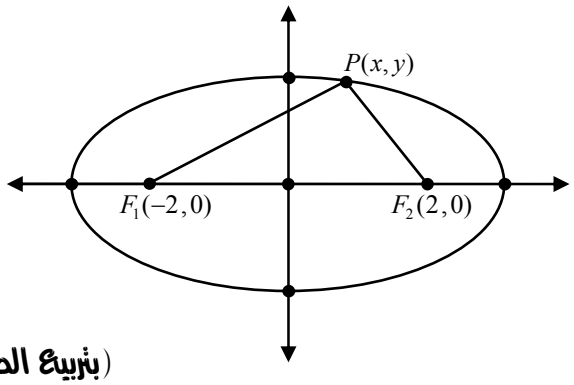
1) إذا كان مقام الـ(x^2) أكبر فالبؤرتان سينيتان
2) إذا كان مقام الـ(y^2) أكبر فالبؤرتان صاديتان
3) الطرف الأيمن في معادلة القطع الناقص دائماً =1

مثال : باستخدام التعريف ، جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0)\ ,\ F_2(2,0)$ **والعدد الثابت** (6)

الحل :

$p(x,y)\ \in$ **القطع الناقص**

$\therefore\ pF_1 + pF_2 = 2a$ (**حسب التعريف**)



$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6-\sqrt{(x+2)^2+y^2} \qquad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$x^2-4x+4+y^2=36-12\sqrt{(x+2)^2+y^2}+x^2+4x+4+y^2$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2}=36+8x \qquad]\div 4$$

$$3\sqrt{(x+2)^2+y^2}=9+2x \qquad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$9(x^2+4x+4+y^2)=81+36x+4x^2$$

$$9x^2+36x+36+9y^2=81+36x+4x^2$$

$$5x^2+9y^2=45 \qquad]\div 45$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1 \qquad \text{معادلة القطع الناقص}$$

مثال : جد طول كل من المحورين وإحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الناقص $(\ 16x^2+25y^2=400\ )$

الحل :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

$a^2=25 \quad \Rightarrow \quad a=5 \quad \Rightarrow \quad 2a=10$ (**طول المحور الكبير**)

$b^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=4 \quad \Rightarrow \quad 2b=8$ (**طول المحور الصغير**)

$c^2=a^2-b^2=25-16=9 \quad \Rightarrow \quad c=3$

$F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$ **البؤرتان**

$V_1(5,0)\ ,\ V_2(-5,0)$ **الرأسان**

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ **الاختلاف المركزي**

مثال : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ويقطع من محور السينات (8) وحدات ومن الصادات (12) وحدة ثم جد المسافة بين بؤرتيه ومساحة منطقته ومحيطه واختلافه المركزي

الحل :

ما يقطعه من الصادات أكبر مما يقطعه من السينات $\Leftarrow$ البؤرتان صاديتان :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$2a=12 \quad \Rightarrow \quad a=6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2=36}$$

$$2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2=16}$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1 \qquad (\text{معادلة القطع})$$

$$c^2=a^2-b^2=36-16=20 \quad \Rightarrow \quad c=2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad 2c=4\sqrt{5} \qquad (\text{المسافة بين البؤرتين})$$

$$A=ab\pi=24\pi \quad \text{وحدة مربعة} \qquad (\text{مساحة المقطع})$$

$$p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{26} \qquad (\text{المحيط})$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad (\text{الاختلاف المركزي})$$

ملاحظة : نقاط تقاطع القطع مع المحورين $(x\ ,\ 0)$ ، $(0\ ,\ y)$ تمثل الرؤوس والأقطاب والأبعد إلى المركز هو الرأس

مثال : جد معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(0\ ,\ 3)\ ,\ (-4\ ,\ 0)$

الحل :

$\because$ $(-4\ ,\ 0)$ أبعد إلى نقطة الأصل من $(0\ ,\ 3)$

$\therefore$ $(-4\ ,\ 0)$ هو أحد رؤوس القطع الناقص (سينية) $\Leftarrow \quad a=4$

$(0\ ,\ 3)$ هو أحد أقطاب القطع الناقص (صادية) $\Leftarrow \quad b=3$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هو :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

مثال : جد معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(4\ ,\ 0)$ **واختلافه المركزي** $(\frac{1}{2})$

الحل :

البؤرة سينية $\Leftarrow$ **المعادلة هي :**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$c=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2=16}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a=2c \quad \Rightarrow \quad a=8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2=64}$$

$$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=a^2-c^2=64-16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2=48}$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$$

مثال : جد معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0\ ,\ -3)$ **والنسبة بين طولي محوريه** $(\frac{4}{5})$

الحل :

البؤرة صادية $\Leftarrow$ **معادلة القطع :**

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

$$c=3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2=9}$$

$$\frac{\text{طول المحور الصغير}}{\text{طول المحور الكبير}}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{2b}{2a}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=\frac{4a}{5}} \quad .....(1)$$

$$a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2=(\frac{4a}{5})^2+9$$

$$\Rightarrow \quad a^2-\frac{16a^2}{25}=9 \qquad]\times 25$$

$$\Rightarrow \quad 25a^2-16a^2=225$$

$$\Rightarrow \quad 9a^2=225 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2=25} \quad \Rightarrow \quad a=5$$

نعوض قيمة (a) **في** (1) **:**

$$b=\frac{4(5)}{5}=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2=16}$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

مثال : لتكن $k x^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(\sqrt{3}, 0)$

جد قيمة $(\ k\ )$

الحل :

نقسم طرفي المعادلة على (36) :

$$\frac{k x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

البؤرة سينية $\Leftarrow$ معادلة القطع :

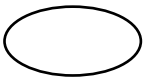
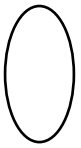
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a^2 = \frac{36}{k}} \quad , \quad \boxed{b^2 = 9} \quad , \quad \boxed{c = \sqrt{3}}$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{36}{k} - 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{k} = 3 + 9 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{36}{12} = 3$$

انسحاب المحاور للقطع الناقص :

درسنا في الأمثلة السابقة القطع الناقص الذي يكون مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على إحدى المحاور الإحداثية ، والآن سوف ندرس القطع الناقص بعد انسحابه إلى جهة معينة وسوف نرمز إلى مركز القطع بـ $(h\ ,\ k)$ وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

القطع الناقص	البؤرتان	الرأسان	القطبان	المعـــادلة
	$\overline{F_1}\ (c+h\ ,\ k)$ $\overline{F_2}\ (-c+h\ ,\ k)$	$\overline{V_1}(a+h\ ,\ k)$ $\overline{V_2}(-a+h\ ,\ k)$	$(h\ ,\ b+k)$ $(h\ ,\ -b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
	$\overline{F_1}\ (h\ ,\ c+k)$ $\overline{F_2}\ (h\ ,\ -c+k)$	$\overline{V_1}(h\ ,\ a+k)$ $\overline{V_2}(h\ ,\ -a+k)$	$(b+h\ ,\ k)$ $(-b+h\ ,\ k)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

ملاحظة : معادلة المحور الكبير يؤخذ من البسط الذي مقامه أصغر ، والمحور الصغير يؤخذ من البسط الذي مقامه أكبر

مثلاً :

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{36} = 1$$

$x = 4$ معادلة المحور الكبير

$y = -7$ معادلة المحور الصغير

مثال : جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$$

الحل :

البؤرتان سينيتان $\Leftarrow$ المعادلة هي :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$h=\boxed{5} \quad , \quad k=\boxed{-4} \quad , \quad a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

$$b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=25-16=9 \Rightarrow \boxed{c=3}$$

البؤرتان :

$$\overline{F_1}(c+h,k)=\overline{F_1}(8,-4)$$
$$\overline{F_2}(-c+h,k)=\overline{F_2}(2,-4)$$

الرأسان :

$$\overline{V_1}(a+h,k)=\overline{V_1}(10,-4)$$
$$\overline{V_2}(-a+h,k)=\overline{V_2}(0,-4)$$

طول المحور الكبير : $2a=10$ وحدة

طول المحور الصغير : $2b=8$ وحدة

معادلة المحور الكبير : $y=-4$

معادلة المحور الصغير : $x=5$

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$

مثال : جد البؤرتين والرأسين وطول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع الناقص :

$$4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$$

الحل :

$$4(x^2-2x)+9(y^2+4y)=-4$$
$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=-4+4+36$$
$$4(x-1)^2+9(y+2)^2=36$$
$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$h=1 \quad , \quad k=-2 \quad , \quad a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=3}$$
$$b^2=4 \Rightarrow \boxed{b=2}$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow c^2=9-4=5 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$$

البؤرتان :
$$\overline{F_1}(c+h,k)=\overline{F_1}(1+\sqrt{5},-2)$$
$$\overline{F_2}(-c+h,k)=\overline{F_2}(-1+\sqrt{5},-2)$$

الرأسان :
$$\overline{V_1}(a+h,k)=\overline{V_1}(4,-2)$$
$$\overline{V_2}(-a+h,k)=\overline{V_2}(-2,-2)$$

طول المحور الكبير : $2a=6$ وحدة

طول المحور الصغير : $2b=4$ وحدة

معادلة المحور الكبير : $y=-2$

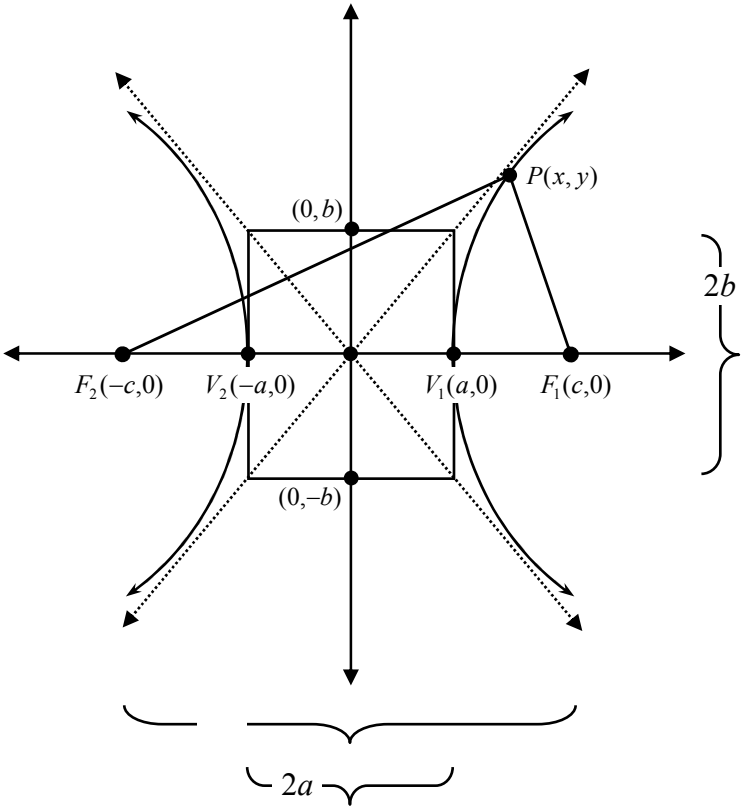
معادلة المحور الصغير : $x=1$

الاختلاف المركزي :
$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

القطع الزائد : Hyperbola

هي مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي أي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عددا ثابتاً

$|PF_1 - PF_2| = 2a$ (حسب التعريف)



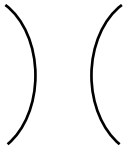
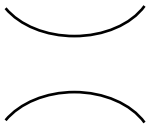
معادلة قطع زائد بؤرتاه سينيتان ومركز نقطة الأصل :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادلة قطع زائد بؤرتاه صاديتان ومركز نقطة الأصل :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

جدول يبين مفردات القطع الزائد في الحالتين :

القطع الناقص	البؤرتان	الراسان	القطبان	المعـــادلة
	$F_1\ (c\ ,\ 0)$ $F_2\ (-c\ ,\ 0)$	$V_1(a,0)$ $V_2(-a,0)$	$(0,b)$ $(0,-b)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	$F_1\ (0\ ,\ c)$ $F_2\ (0\ ,\ -c)$	$V_1(0,a)$ $V_2(0,-a)$	$(b,0)$ $(-b,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

خواص مشتركة :

1) $c^2=a^2+b^2 \quad \Leftarrow \quad c \succ a,b$

2) **طول المحور الحقيقي =** $2a$ (**العدد الثابت**)

3) **طول المحور التخيلي =** $2b$ (**المحور المرافق**)

4) **المسافة بين البؤرتين =** $2c$ (**البعد البؤري**)

5) **الاختلاف المركزي :** $e=\frac{c}{a} \quad \succ 1$

ملاحظات :

1) **إذا كانت إشارة الـ** (x^2) **موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه سينيتان**

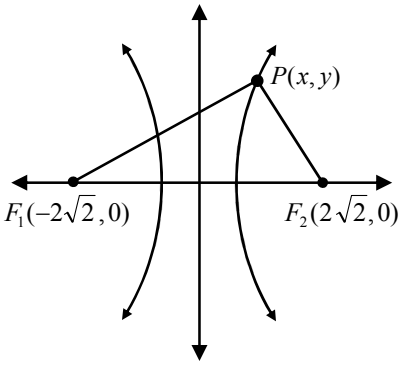
2) **إذا كانت إشارة الـ** (y^2) **موجبة فالقطع الزائد بؤرتاه صاديتان**

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $(-2\sqrt{2},0),(2\sqrt{2},0)$ والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أية نقطة منه عن بؤرتيه يساوي (4) ، باستخدام التعريف

الحل :

$p(x,y) \in$ القطع الزائد

$\therefore |pF_1 - pF_2| = 4$ (حسب التعريف)



$$\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} - \sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2+y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} + x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2$$

$$\mp 8\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = 16 - 8\sqrt{2}x \qquad]\div 8$$

$$\mp \sqrt{(x-2\sqrt{2})^2+y^2} = 2 - \sqrt{2}x \quad \text{(بتربيع الطرفين)}$$

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 - 4\sqrt{2}x + 2x^2$$

$$-x^2 + y^2 = -4 \qquad]\div(-4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$ معادلة القطع الزائد هي :

مثال : جد معادلة قطع زائد اختلافه المركزي (2) والمسافة بين بؤرتيه (12) وبؤرتاه على محور الصادات

الحل :

البؤرتان صاديتان $\Leftarrow$ معادلة القطع :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$2c = 12 \quad \Rightarrow \quad c = 6$$

$$e = \frac{c}{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{c}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = 9}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 36 - 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2 = 27}$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$$

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $(0,-2\sqrt{5})$ وطول محوره الحقيقي (8) وحدات

الحل :

البؤرة صادية $\Leftarrow$ معادلة القطع :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$c=2\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad c^2=20$$

$$2a=8 \quad \Rightarrow \quad a=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2=16}$$

$$c^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2=20-16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2=4}$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$$

ملاحظة : إذا مر القطع الزائد بنقطة إحدى إحداثياتها (صفر) ، فالنقطة تمثل إحدى رؤوسه

مثال : جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(0,3\sqrt{2}),(3,-6)$

الحل :

القطع الزائد يمر بالنقطة $(0,3\sqrt{2})$ **$\Leftarrow$ هي إحدى رؤوس القطع (صادية) :**

$$a=3\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2=18}$$

فتكون المعادلة :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{18}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$(3\ ,\ -6) \ni$ للقطع $\Leftarrow$ تحقق معادلة القطع :

$$\frac{36}{18}-\frac{9}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad 2-\frac{9}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{b^2}=2-1=1$$

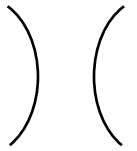
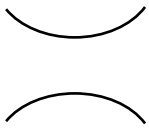
$$\Rightarrow \quad \boxed{b^2=9}$$

معادلة القطع الزائد :

$$\frac{y^2}{18}-\frac{x^2}{9}=1$$

انسحاب المحاور للقطع الزائد :

درسنا في الأمثلة السابقة القطع الزائد الذي يكون مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على إحدى المحاور الإحداثية ، والآن سوف ندرس القطع الزائد بعد انسحابه إلى جهة معينة وسوف نرمز إلى مركز القطع بـ $(h\ ,\ k)$ وهذا الجدول يلخص لنا جميع الحالات :

القطع الناقص	البؤرتان	الراسان	القطبان	المعـــادلة
	$\bar{F}_1\ (c+h\ ,\ k)$ $\bar{F}_2\ (-c+h\ ,\ k)$	$\bar{V}_1(a+h\ ,\ k)$ $\bar{V}_2(-a+h\ ,\ k)$	$(h\ ,\ b+k)$ $(h\ ,\ -b+k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
	$\bar{F}_1\ (h\ ,\ c+k)$ $\bar{F}_2\ (h\ ,\ -c+k)$	$\bar{V}_1(h\ ,\ a+k)$ $\bar{V}_2(h\ ,\ -a+k)$	$(b+h\ ,\ k)$ $(-b+h\ ,\ k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

مثال : جد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$4x^2-9y^2-16x-54y=101$$

الحل :

$$4(x^2-4x)-9(y^2-6y)=101$$
$$4(x^2-4x+4)-9(y^2+6y+9)=101+16-81$$
$$4(x-2)^2-9(y+3)^2=36 \qquad]\div 36$$
$$\left.\begin{array}{l}\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1\\ \frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left|\begin{array}{l}h=\ 2\ ,\ k=\ -3\ ,\ \boxed{a=3}\ ,\ \boxed{b=2}\\ c^2=a^2+b^2=9+4=13 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c=\sqrt{13}}\end{array}\right.$$

المركز : $(h,k)=(2,-3)$

البؤرتان :
$$\bar{F}_1(c+h,k)=\bar{F}_1(2+\sqrt{13},-3)$$
$$\bar{F}_2(-c+h,k)=\bar{F}_2(2-\sqrt{13},-3)$$

الرأسان :
$$\bar{V}_1(a+h,k)=\bar{V}_1(5,-3)$$
$$\bar{V}_2(-a+h,k)=\bar{V}_2(-1,-3)$$

الاختلاف المركزي : $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

أسئلة تربط بين القطوع المخروطية

س1) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمار من النقطة $(-2,3)$

الجواب: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

س2) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 24y = 0$ ويمر من نقطتي تقاطع المنحني $x^2 + y^2 + 6y - 64 = 0$ مع محور السينات

الجواب: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

س3) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه هما بؤرتا القطع الزائد $15y^2 - x^2 = 60$ وطول محوره الأكبر يساوي (3) أمثال طول محوره الأصغر

الجواب: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{72} = 1$

س4) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ والفرق بين طولي محوريه يساوي طول المحور الأساسي للقطع الزائد نفسه

الجواب: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

س5) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الأصل ومساحة منطقته (7π) وحدة مربعة ومحيطه يساوي (10π) وحدة

الجواب: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{1}=1$

س6) لتكن A هي بؤرة القطع المكافئ $x^2+24y=0$

ولتكن B هي بؤرة القطع المكافئ $y^2-32x=0$

a) جد معادلة القطع الناقص الذي يمر من A و B

b) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي A ويمر من B

c) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي A والنسبة بين طولي محوريه $(\frac{4}{5})$

d) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي B وطول محوره المرافق يساوي AB

e) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي A وطول محوره المرافق يساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=4\sqrt{2}x$ ودليله

الجواب: $a=(0,-6)\quad,\quad b=(8,0)$

$a)\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{36}=1$ $\quad b)\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ $\quad c)\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

$d)\ \frac{x^2}{39}-\frac{y^2}{25}=1$ $\quad e)\ \frac{y^2}{34}-\frac{x^2}{2}=1$

س7) جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ $x^2-40y=0$ إذا علمت بأن النسبة بين المسافة بين بؤرتيه إلى طول محوره الصغير $(\frac{4}{3})$

الجواب: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$

س8) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2+40x=0$ والذي يمس دليل القطع المكافئ $y^2+32x=0$

الجواب: $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

س9) ABC مثلث فيه A(0,4) , B(0,-4) وأن B,A بؤرتان لقطع ناقص C من نقطهِ ، فإذا كان محيط المثلث (20) وحدة طول ، فجد معادلة القطع الناقص

الجواب: $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$

س10) القطع المكافئ $x^2=(3-m)y$ مركزه نقطة الأصل ودليله يمر من النقطة (-4,8) جد قيمة (m)

الجواب: $m=35$

س11) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2+32x=0$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي إلى طول محوره التخيلي $(\frac{1}{\sqrt{3}})$

الجواب: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{48}=1$

س12) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر من النقطتين $(0,2)$, $(2,-\sqrt{5})$

الجواب: $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1$

س13) القطع الناقص $8x^2+2y^2=k$ المسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2=4\sqrt{6}x$ ودليله ، جد قيمة (k)

الجواب: $k=16$

س14) القطع الناقص $9x^2+k^2y^2=9k^2$ إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $\frac{1}{4}y^2+4x=0$ ، جد قيمة (k)

الجواب: $k=\pm5$

س15) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $5x^2+y^2=20$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي إلى البعد بين بؤرتيه ($\frac{1}{4}$)

الجواب: $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{15}=1$

س16) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه من نقط محور الصادات والمسافة بين بؤرتيه تساوي المسافة بين بؤرة القطع المكافئ $y^2+24x=0$ ودليله وكانت مساحة منطقة القطع الناقص تساوي (80π) وحدة مربعة

الجواب: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$

س17) القطع الناقص $5x^2+y^2=20$ يمر من بؤرتي قطع زائد والقطع الزائد نفسه يمر من بؤرتي القطع الناقص جد معادلة القطع الزائد

الجواب: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

س18) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2-24y=0$ والذي يقطع من دليل القطع المكافئ نفسه قطعة طولها (10) وحدات

الجواب: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{20}=1$

س19) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2-24y=0$ والذي يقطع من دليل القطع المكافئ نفسه قطعة طولها (10) وحدات

الجواب: $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{81}=1$

س20) قطع مكافئ بؤرته $(0,\frac{1}{4})$ ورأسه نقطة الأصل جد معادلته ، إذا قطع منحني القطع المكافئ المستقيم $2x-y+3=0$ في النقطتين A,B فجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm 6)$ وطول محوره الحقيقي (AB)

الجواب: $\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$

س21) جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(0,p)\ ,\ F_2(0,-p)$ وكانت N من نقطةٍ حيث :

$|F_1N - F_2N| = 4$ وأن القطع الزائد يقطع من دليل القطع المكافئ $x^2 + 24y = 0$ قطعة طولها (8) وحدات

الجواب: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} = 1$

س22) القطعان $9x^2 + k^2y^2 = 9k^2$, $N^2x^2 - 16y^2 = 16N^2$ كل منهما يمر من بؤرة الآخر جد قيمة $N\ ,\ k$ الموجبتين

الجواب: $N = 3$, $k = 5$

س23) جد مساحة منطقة القطع الناقص الذي بؤرتاه من نقط محور الصادات والذي يقطع القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$ في نقطتين إحداثيهما الصادي هو (-2) وأن النسبة بين طولي محوريه $(\frac{1}{2})$

الجواب: $A = 34\pi$ وحدة مربعة

س24) B , C يؤرتان لقطع ناقص محوره الأكبر على محور الصادات ، و A من نقطةٍ ، وليكن AD يمثل ارتفاع المثلث ABC حيث AB = AC وليكن محيط هذا المثلث يساوي (36) وحدة طول ، فإذا كان AD = $\frac{3}{8}$ BC ، فجد معادلة هذا القطع

الجواب: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

س25) النقطة (0,M-4) هي بؤرة قطع مكافئ يمر من النقطة (-4,2) ورأسه نقطة الأصل ، مستخدماً التعريف جد قيمة M

الجواب: $M = 6$

س26) جد مجموعة نقط المستوي التي يكون بعد أية نقطة منها عن النقطة (12,0) يساوي ضعف بعد نفس النقطة عن المستقيم $x = 3$ ، ارسم الشكل الذي تمثله المجموعة

الجواب: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$

س27) قطعان زائد وناقص بؤرتاهما تقعان على أحد محوري الإحداثيين لهما مماس مشترك هو دليل القطع المكافئ $x^2 + 20y = 0$ والمسافة بين أقرب بؤرتين لهما تساوي (6) وحدة والزائد يمر بالنقطة $(\sqrt{24}, \sqrt{50})$ ، جد معادلة كل منهما

الجواب: $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

س28) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 1 , 9 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين

الجواب: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$