

(4-1) المشتقة العكسية و التكامل الغير المحدود

إذا كانت الدالة : $F(x)=x^3$, $G(x) = 3x^2$
 $F'(x) = 3x^2 \therefore F'(x) = G(x)$
 فأننا نقول أن الدالة $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $G(x)$
 تمرين : إذا كان

$$F(x) = \sin x \quad ; \quad G(x) = \cos x$$

أثبت أن الدالة $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $G(x)$

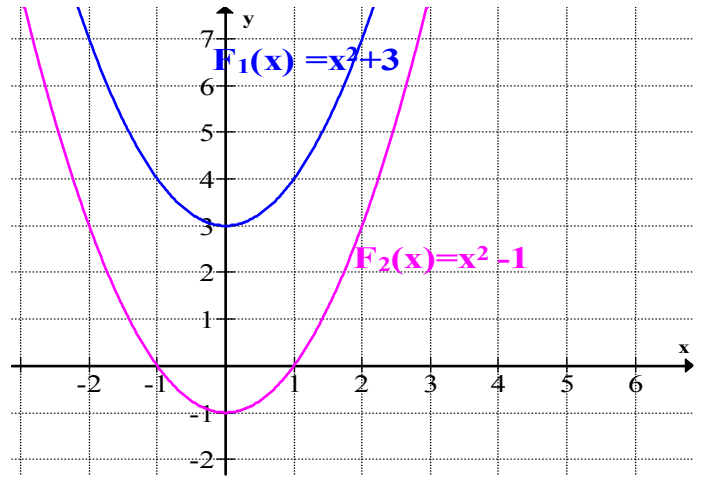
ملاحظة : إذا كانت الدالة $F(x)$ هي المشتقة العكسية للدالة $G(x)$ فإن كل دالة على النمط $F(x) + C$ تكون أيضا مشتقة عكسية للدالة $G(x)$
 نظرية (1)

إذا كانت الدالتان : $F(x)$, $G(x)$ هما المشتقة العكسية للدالة $H(x)$ فإن الدالتان $F(x)$ و $G(x)$ لا يختلفان إلا في الثابت أي

$$F'(x) = H(x) , \quad G'(x) = H(x) \Rightarrow F(x) - G(x) = c$$

في الشكل المقابل الدالتان : $F_1(x) = x^2 - 1$; $F_2(x) = x^2 + 3$

$$F_1'(x) = F_2'(x) = 2x \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$



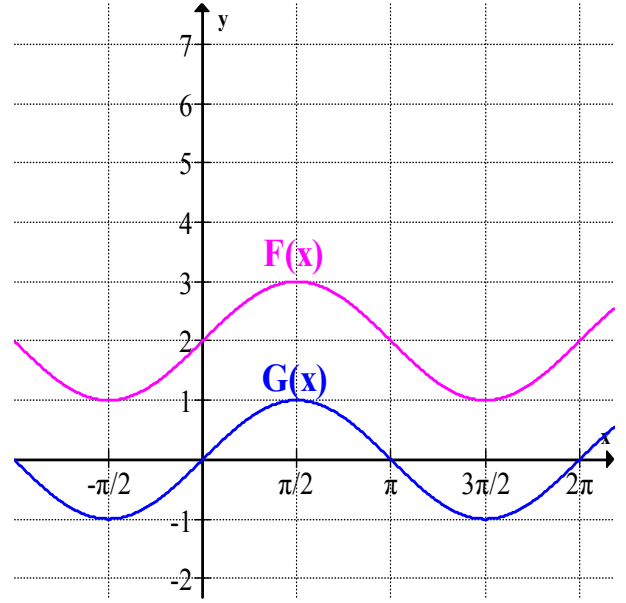
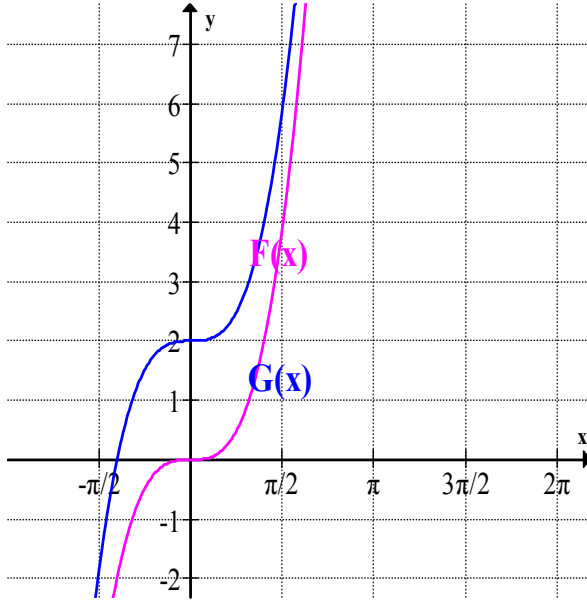
تمرين

(1) لتكن الدالتان $G(x) = (x-2)^2$, $F(x) = x^2 - 4x + 1$ كل منهما تمثل المشتقة العكسية للدالة $f(x)$. أوجد

(أ) قيمة الثابت C الذي تختلف به الدالتان $F(x)$; $G(x)$

(ب) أوجد الدالة $f(x)$

(2) الشكل المقابل : يمثل الدالتان : $F(X)$, $G(X)$. أثبت أن الدالتان $F(X)$, $G(X)$ كل منهما المشتقة العكسية لدالة $f(x)$ و لتكن



التكامل الغير محدد :
قاعدة :

$$\int X^n dx = \frac{X^{n+1}}{n+1} + c$$

وهذه القاعدة لجميع قيم n الحقيقية ماعدا $(n=-1)$

أحسب التكاملات التالية

(1) $\int x^2 dx = \dots\dots\dots; \int x^3 dx = \dots\dots\dots; \int x^4 dx = \dots\dots\dots$

(2) $\int x^{-2} dx = \dots\dots\dots$

(3) $\int (x^3 + x - 2) dx = \dots\dots\dots$

(4) $\int (5x^4 - 6x^2 + 4x) dx = \dots\dots\dots$

(5) $\int (12x^3 + \frac{1}{x^2} + \pi) dx = \dots\dots\dots$

(6) $\int (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}) dx = \dots\dots\dots$

(7) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}) dx = \dots\dots\dots$

$$(8) \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right) dx = \dots\dots\dots$$

$$(9) \int (x+3)(x-3) dx = \dots\dots\dots$$

$$(10) \int (x^2 - 4)^2 dx = \dots\dots\dots$$

$$(11) \int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx = \dots\dots\dots$$

$$(11) \int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx = \dots\dots\dots$$

$$(12) \int \left(4x^3 + -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \right) dx$$

.....

$$(13) \int \left(2x^3 + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{x} - 2 \right) dx$$

.....

$$(14) \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$$

.....

$$(15) \int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \dots\dots\dots$$

.....

$$(16) \int (\sqrt{x} - x)^2 dx = \dots\dots\dots$$

.....

$$(17) \int \left(\frac{x+4}{\sqrt{x}} \right) dx = \dots\dots\dots$$

.....

تكمّل الدوال المثلثية :

أولا بعض قواعد حساب المثلثات الشهيرة التي يحتاجها الطالب

$$(1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \sin^2 x = 1 - \cos^2 x ; \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$(2) \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$(3) \cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

$$(4) \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$(5) \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$$(6) \sec x = \frac{1}{\cos x}; \csc x = \frac{1}{\sin x}; \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$(7) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}; \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

فيما يلي بعض التكاملات الشهيرة للدوال المثلثية :

$$(1) \int \sin x dx = -\cos x + c; \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + c$$

$$(2) \int \cos x dx = \sin x + c; \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$(3) \int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$(4) \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$(5) \int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$(6) \int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

احسب ما يلي

$$(1) \int \sec x (\tan x + \cos x) dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(2) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(3) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(4) \int \frac{1}{1 - \cos 2x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(5) \int \frac{3 + \sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(6) \int \frac{\cos x \sin x - 4}{\sin^2 x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(7) \int \csc x (\sec x \tan x - \cot x) dx$$

.....

.....

.....

$$(8) \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx$$

.....

.....

.....

$$(9) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$$

.....

.....

.....

$$(10) \int \left(\frac{\cos x - 2}{1 - \cos^2 x} \right) dx$$

.....

.....

.....

$$** (11) \int \csc x (4\pi^2 + \sin x \cos x) dx$$

.....

.....

.....

$$*(12) \int \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

.....

.....

.....

$$*(13) \int \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

.....

.....

.....

* (14) $\int (\tan^2 x + \tan^4 x) dx$

.....

.....

.....

.....

ملاحظة هامة

$$(1) \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

أمثلة و تمارين

$$f(x) = \frac{d}{dx} (\sin x^2)$$

$$; \quad g(x) = \frac{d}{dx} \left(x \cos \frac{1}{x} \right)$$

اوجد

$$(1) \int g(x) dx = \dots\dots\dots$$

.....

$$(2) \int (f(x) + \cos x) dx = \dots\dots\dots$$

.....

المعادلات التفاضلية

حل المعادلات التفاضلية التالية

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\sec x}$$

$$; y(\pi) = 5$$

.....

.....

.....

.....

(2)

- التطبيقات الفيزيائية للتكامل :-
- (أ) تتحرك نقطة على خط مستقيم مبتدئة من السكون ($v(0)=0$ m/sec) – بعجلة مقدارها $a = 6t-8$ m/sec². أوجد
(أ) السرعة المتجهة v و المسافة كدالة في t .

(ب) بعد الجسم عن نقطة البدء بعد 5 ثواني من بدء الحركة .

- (2) سقط حجر من قمة برج ارتفاعه 490 m وكانت قوة الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة عليه ($a = -9.8$ m / sec²) أوجد
(أ) السرعة المتجهة و المسافة كدالة في الزمن t .

(ت) أوجد السرعة عند اصطدام الحجر بالأرض .

(10)

الحركة

التوافقية البسيطة : يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة بعجلة تعطي بالعلاقة التالية :

$$a = -\sin t - \cos t ; v(0) = 1 , s(0) = 1$$

أوجد

(أ) السرعة المتجهة v و دالة الموضع s كدالة في الزمن t .

(ب) أوجد أكبر و اصغر قيمة لـ s .

(4-2) الدالة اللوغارتمية الطبيعية و الدالة الأسية الطبيعية

أولا الدالة اللوغارتمية

تذكر قواعد اللوغارتميات السابق دراستها في العام التالي

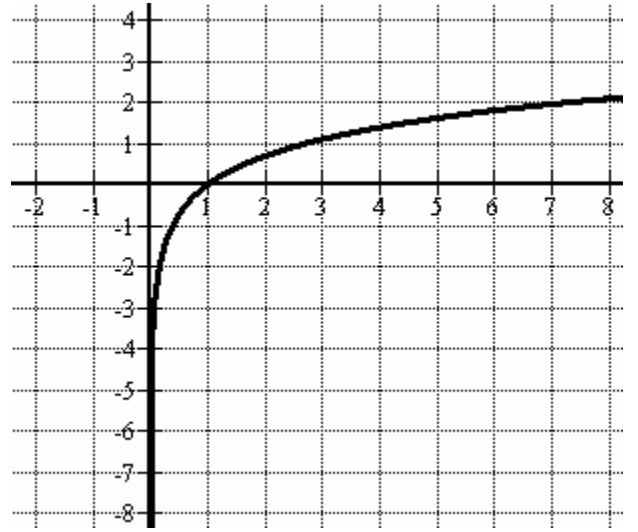
$$(1) \ln x y = \ln x + \ln y$$

$$(2) \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$(3) \ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$(4) \ln x^r = r \ln x$$

$$(5) e^{\ln x} = x$$



نظرية (دون برهان)

$$(1) f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

نتيجة :

$$g(x) = \ln f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

تمارين : أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي :

$$(1) f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$$

.....

$$(2) f(x) = \ln(\sin x)$$

.....
.....
.....

$$(3) f(x) = \ln \sqrt{x}$$

.....
.....
.....
.....

$$(4) f(x) = \ln \frac{1}{x}$$

.....

.....

.....

.....

$$(5) f(x) = \ln (\ln x)$$

.....

.....

.....

$$(6) f(x) = \log x$$

.....

.....

.....

$$(7) f(x) = \frac{\ln 2}{\ln x}$$

.....

.....

.....

$$(8) f(x) = x^{\ln e^2}$$

.....

.....

.....

$$(9) f(x) = (\ln x)^3$$

.....

.....

.....

$$(10) f(x) = x \ln x$$

.....

.....

.....

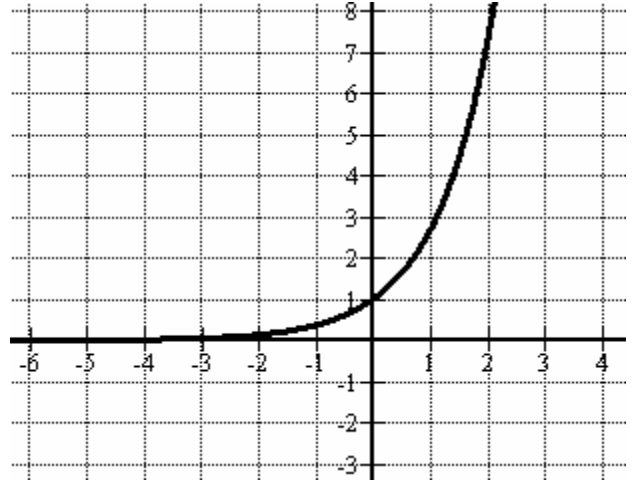
ثانياً : الدالة الأسية : $f(x) = e^x$
 خواص الدالة الأسية

$$(1) e^x \times e^y = e^{x+y}$$

$$(2) \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

$$(3) e^0 = 1$$

$$(4) a^x = e^{x \ln a}$$



$$(1) f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

نظرية ☹

$$(2) f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) e^{g(x)}$$

تمارين أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

$$(1) y = e^{2x}$$

.....

$$(2) y = e^{x^2-3x+1}$$

.....

$$(3) y = e^{\sin x}$$

.....

$$(4) y = x^2 e^x$$

.....

$$(5) y = e^{\tan x} \ln x$$

.....

$$(6) y = x^e$$

.....

.....

$$(7) y = 2^x$$

.....

.....

$$(8) y = e^{\ln x}$$

.....

$$(9) y = \sqrt{e^x}$$

.....

.....

.....

$$(10) y = e^{\sqrt{x}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

ثانيا : التكامل

$$(1) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$(2) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$(3) \int e^x dx = e^x + c \quad ; \quad (4) \int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

تمارين : احسب ما يلي : -

$$(1) \int \cot x dx$$

.....

.....

$$(2) \int \tan x dx$$

.....

.....

$$(3) \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

.....

.....

$$(4) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

.....

.....

$$(5) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

.....

.....

$$(6) \int \frac{1}{ax+b} dx$$

.....

.....

$$(7) \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx$$

.....

.....

$$(8) \int \frac{x^{-1}}{x^{-1}+2} dx$$

.....

.....

$$(9) \int \frac{2}{3x-1} dx$$

.....

.....

$$(10) \int \frac{x}{x+1} dx$$

.....

.....

$$(11) \int e^{-x} dx$$

.....

.....

$$(12) \int x e^{x^2+1} dx$$

.....

.....

$$(13) \int \frac{e^{x^3 - 2}}{x} dx$$

.....

.....

$$(14) \int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$$

.....

.....

$$(15) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

.....

.....

$$(16) \int e^{x^2 + \ln x} dx$$

.....

.....

$$(17) \int \ln(e^x) dx$$

.....

.....

$$(18) \int 2^x dx$$

.....

.....

$$(19) \int e^{x^2} dx$$

.....

.....

$$(20) \int e^{e^{-x}} dx$$

.....

.....

.....

$$(a) \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(b) \frac{d^2 y}{dx^2} = \sec^2 x \quad ; \quad y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1, \quad y(0) = 1$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(22) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخط العمودي على منحنى الدالة $y = e^{-x}$ والذي يمر
(أ) بالنقطة $(0, 1)$ (ب) بنقطة الأصل .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

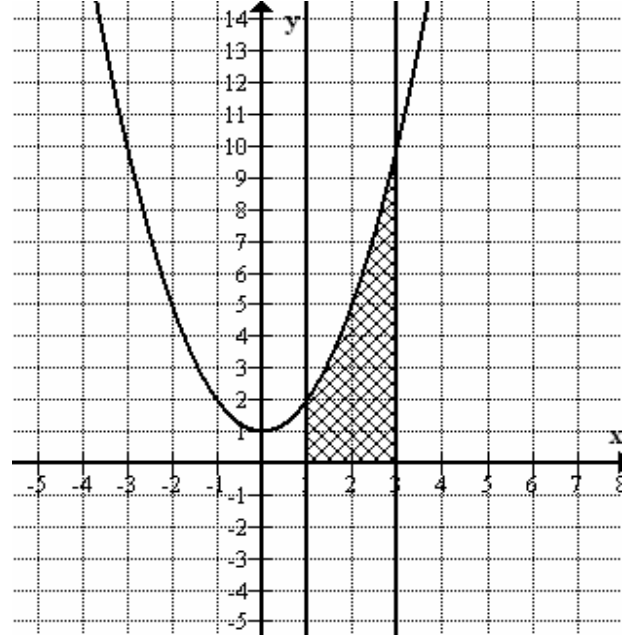
.....

.....

(4-3) التكامل المحدد

حساب المساحة بين المنحنيات بطريقة التقريب بالمستطيلات :
تمرين :

لتكن الدالة : $f(x) = x^2 + 1$ - أوجد المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ وبين محور السينات و المستقيمتين $x=1$, $x=3$ بتقسيم الفترة $[1, 3]$ إلى 5 فترات جزئية متساوية مستخدماً
(أ) طريقة التقريب اليميني (ب) طريقة التقريب اليساري (ج) طريقة التقريب المنتصفي



تعريف التكامل المحدد

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ وكانت

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

مهما كانت طريقة التجزئة P و الأعداد C_k فإن

النهاية السابقة تسمى تكامل الدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ ويرمز لها بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ أي

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

ويسمى a الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل .
أولاً: أحسب التكاملات المحددة التالية (مستعيناً بالرسم)

$$(1) \int_{-1}^5 3 dx$$

$$(2) \int_1^4 -2 dx$$

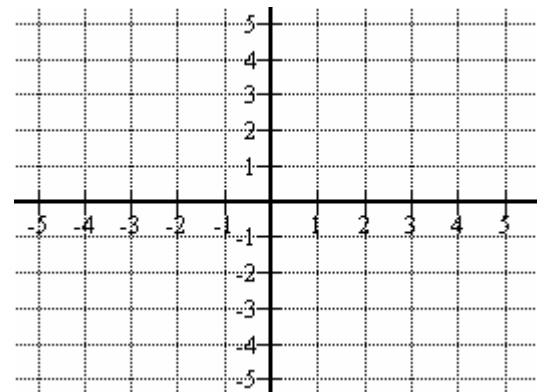
$$(3) \int_2^5 x dx$$

$$(4) \int_{-3}^3 x dx$$

$$(5) \int_1^4 (x + 1) dx$$

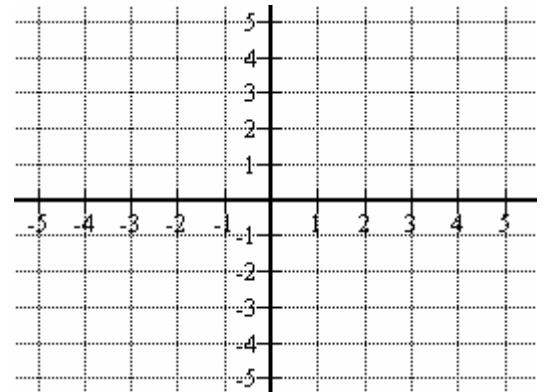
ثانياً : ارسم بيانياً الدالة على الفترة المعطاه ثم أوجد تكامل الدالة على الفترة

$$(a) y = |x| \quad ; [-1, 3]$$



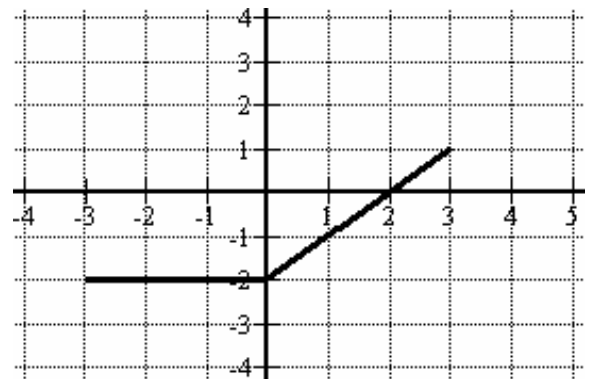
(b) $y = 2x + 2$

; ; $[-2,]$

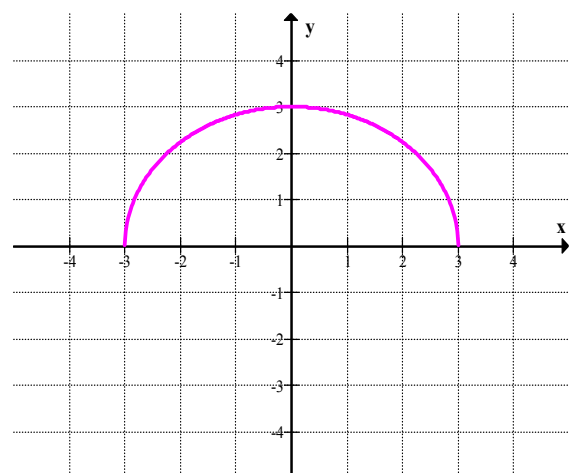


ثانيا مستعينا بالسـم احسب التكاملات المحددة التالية

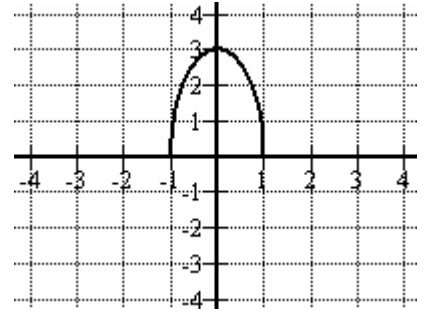
(1) $\int_{-3}^3 f(x) dx$



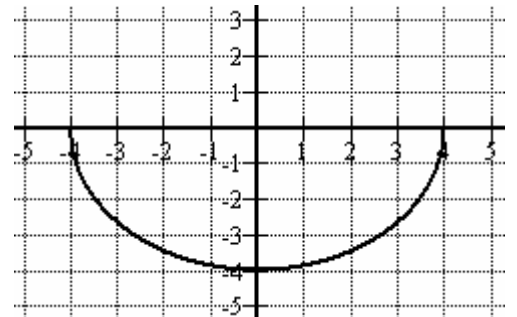
(2) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$



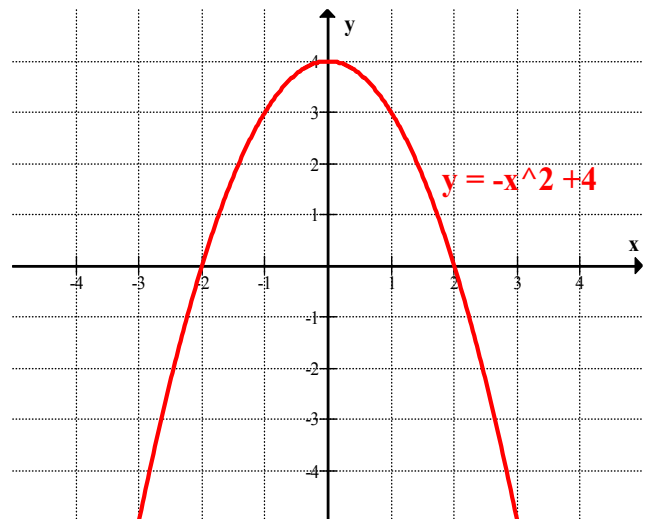
$$(3) \int_{-1}^1 \sqrt{9-9x^2} dx$$



$$(4) \int_{-4}^4 -\sqrt{16-x^2} dx$$



$$(5) \int_{-2}^2 -x^2 + 4$$



(c) (b) $y = x^2 + 2x - 3$; $[-3, 1]$

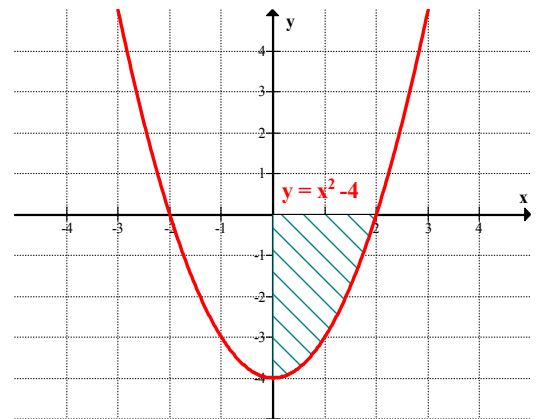
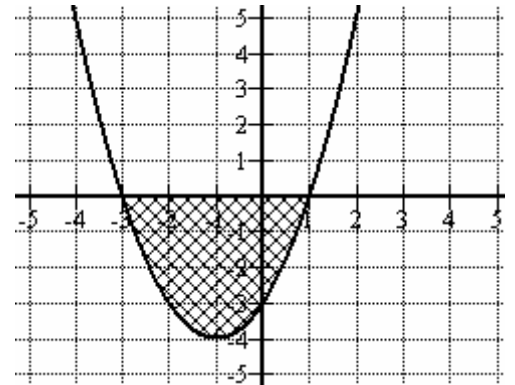
(إرشاد : قانون أرشميدس المساحة تحت قوس القطع المكافئ هي $A = \frac{2}{3} b h$ ، b طول القاعدة ، h الارتفاع)

في الشكل المقابل : لإيجاد مساحة المنطقة
المظللة باستخدام قاعدة أرشميدس : نلاحظ
أن $b=4$, $h=4$

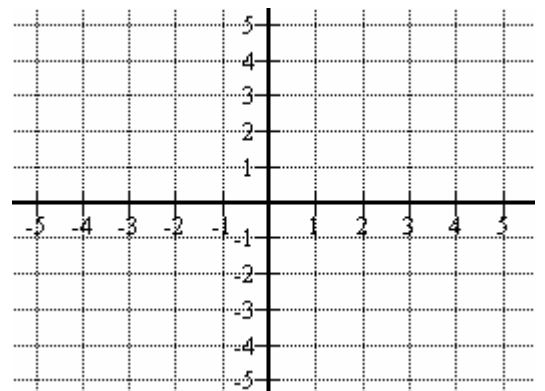
$$A = \frac{2}{3} \times 4 \times 4 = 10\frac{2}{3}$$

$$\int_{-3}^1 (x^2 + 2x - 3) dx = -10\frac{2}{3}$$

$$(6) \int_0^2 (x^2 - 4) dx$$



(d) $y = 3x - x^2$; $[1, 4]$



$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(3) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(4) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(6) \text{ If: } \min f \leq f(x) \leq \max f, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \min f(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx < \max f(b-a)$$

$$(7) \text{ If: } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(8) \text{ If: } f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

تمارين :-
أولاً:

$$(a) \int_{\pi}^x f(y) dy = \cos^2 x + c$$

(1) أوجد قيمة c إذا علم :

.....
.....

$$(b) \int_1^x f(y) dy = \ln x + c$$

.....
.....

(ثانياً) في التمارين A , B أوجد لكل من التكاملات التالية $\max f, \min f$ دون حساب التكامل :

$$(A) \int_1^{10} \frac{1}{x} dx$$

$$(B) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

.....

.....

(ثالثاً) أجب عن الأسئلة الآتية

$$(1) \int_a^2 4 dx = 12 \Rightarrow a = ..$$

$$(2) \int_{-2}^2 k dx = 8 \quad \therefore k =$$

$$(3) f(x) \int_{-1}^1 x^n dx = 2 \int_0^1 x^n dx \quad \therefore n = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$(4) \int_{-1}^1 x^n dx = 0 \quad \therefore n = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$(5) f(x) \text{ دالة فردية , } \int_{-2}^b f(x) dx = 0 \quad \{ \text{مع التفسير.} \} \text{ فإن مجموعة قيم } b \text{ هي : } \{ \quad \quad \quad \}$$

$$(6) f(x) > 0 ; \forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \text{ دالة تزايدية}$$

$$\int_b^a f(x) dx < 0 \quad \text{فسر لماذا}$$

.....

.....

(رابعاً) دون حساب التكامل بين لماذا

$$(1) \int_0^1 x^2 dx < \int_0^1 x dx$$

.....

$$(2) \int_1^2 x^2 dx > \int_1^2 x dx$$

.....

(خامساً) أحسب $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

$$(1) y = \int_1^2 f(x) dx$$

$$(2) y = \int \sin x^2 dx$$

$$\int_1^6 2f(x) dx = 10 \quad ; \quad \int_1^5 f(x) dx = 4 \quad : \text{ (سادساً) : إذا كان}$$

$$\int_6^5 f(x) dx \quad \text{فأوجد}$$

سابعاً (أ) الإزاحة الأفقية والرأسية : إذا كانت $\int_a^b f(x) dx = k$ فإن

$$(1) \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = k \quad ; \quad (1) \int_a^b (f(x) + c) dx = k + c(b-a)$$

$$\text{تمارين إذا كان } \int_1^3 f(x) dx = 4 \quad \text{فأوجد}$$

$$(a) \int_2^4 f(x-1) dx$$

$$(b) \int_0^2 f(x+1) dx$$

$$(c) \int_1^3 (f(x) + 1) dx$$

$$(d) \int_5^3 (f(x-2) + 2) dx$$

$$(ب) (الامتداد - التضييق) إذا كان $\int_a^b f(x) dx = k$ فإن $\int_{ac}^{cb} f(x/c) dx = ck$$$

$$\text{فمثلاً : } \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3} \quad \text{نجد أن } \int_2^4 (x/2)^2 dx = \frac{14}{3} \quad , \quad \int_{0.5}^1 (2x)^2 dx = \frac{7}{6}$$

تمرين : إذا كان $\int_0^1 f(x)dx = 4$ فأوجد

$$(a) \int_0^3 f(x/3)dx$$

$$(b) \int_0^{0.5} f(2x)dx$$

تاسعاً : أحسب كلاً من المجاميع التالية

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{15} r$$

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{10} r^2$$

$$(3) \quad \sum_{r=1}^n (6r^2 + 2r + 5) = 2n^3 + 4n^2 + 7n$$

أثبت أن

نظرية القيمة الوسطى في التكامل :

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ فإن القيمة المتوسطة على الفترة $[a, b]$ هي

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ويوجد عدد c بحيث: $a < c < b$ بحيث يكون :

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

تمارين :

(1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة عند أي النقاط في الفترة تأخذ الدالة هذه القيمة المتوسطة .

(A) $f(x) = x^2 + 1$; $x \in [1, 3]$

...

(B) $f(x) = \sin x$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(c) $f(x) = 0.5x^2 - 1$; $x \in [0, 2]$

(d) $f(x) = e^x$; $x \in [0, 1]$

(e) $y = \sqrt{x}$; $[1, 9]$

النظرية الأساسية (الجزء 1)

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ والدالة F معرفة كما يلي $F(X) = \int_a^X f(t)dt$ فإن $\frac{dF}{dx} = f(x)$ تمارين : أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كلاً مما يلي :

$$(1) y = \int_{\pi}^X \sin t dt$$

.....

$$(2) y = \int_0^{X^2} \cos t dt$$

.....

$$(3) y = \int_x^1 \sqrt{t} dt$$

.....

$$(4) y = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t} dt$$

.....

ملاحظة: إذا كانت $f'(x) = 0$ فإن الدالة $f(x)$ ثابتة

(5) أثبت أن الدالة $f(x)$ ثابتة و أوجد قيمة الثابت حيث

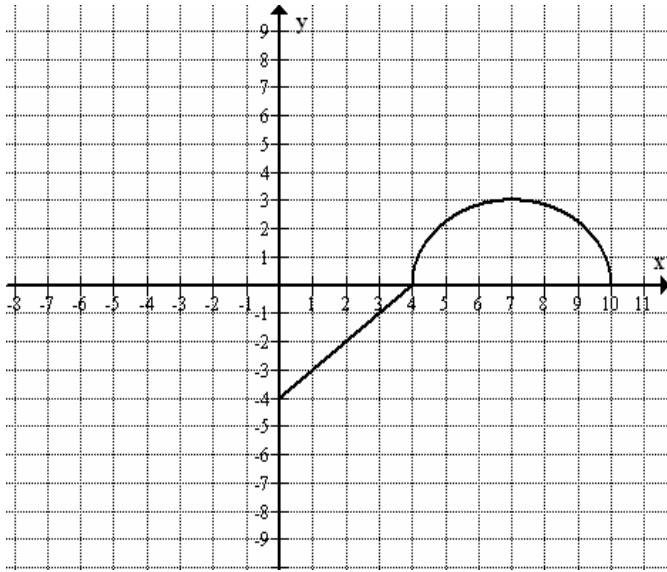
$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$$

.....

$$(6) \int_1^x f(y) dy = x \sin \pi x$$

فأوجد $f(2)$

(7) بفرض أن $G(X) = \int_0^x f(t)dt + 8$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة $[0,10]$ و المبين رسمها البياني كما يلي . أوجد كلاً من



(أ) $g(7)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$

.....
.....
.....

(ب) هل منحنى $g(x)$ يمر بنقطة الأصل.

(ت) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن و أصغر ما يمكن مع التعليل.

.....
.....

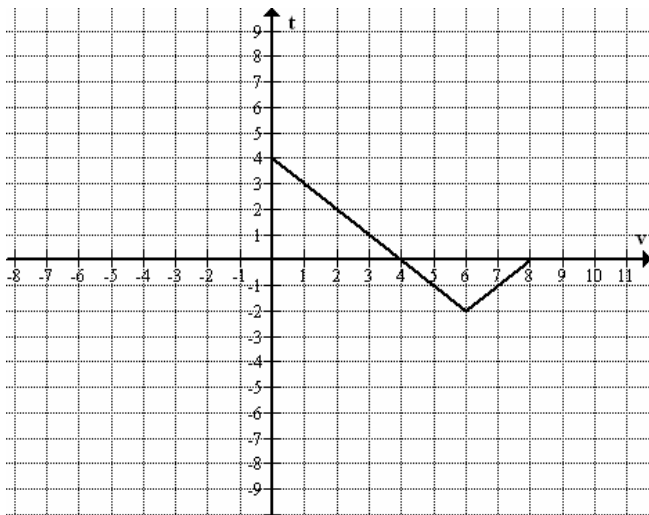
(ث) أحسب $\int_0^{10} f(x) dx$ ، $g(10)$

.....
.....

هل النتيجة متساويتان ؟ فسر .

(8) دالة الموضع s لجسم يتحرك على محور إحداثيات عند الزمن t (بالثواني) يعطي بالعلاقة التالية

$s(t) = \int_0^t v(t)dt - 6$ والرسم البياني للدالة v كما هو موضح بالرسم . أجب عن الأسئلة التالية



(أ) ما موقع الجسم عند $t = 2$ ، $t = 8$

.....
.....

(ب) أحسب المسافة التي تحركها الجسم خلال الثواني الثمانية الأولى .

.....
.....

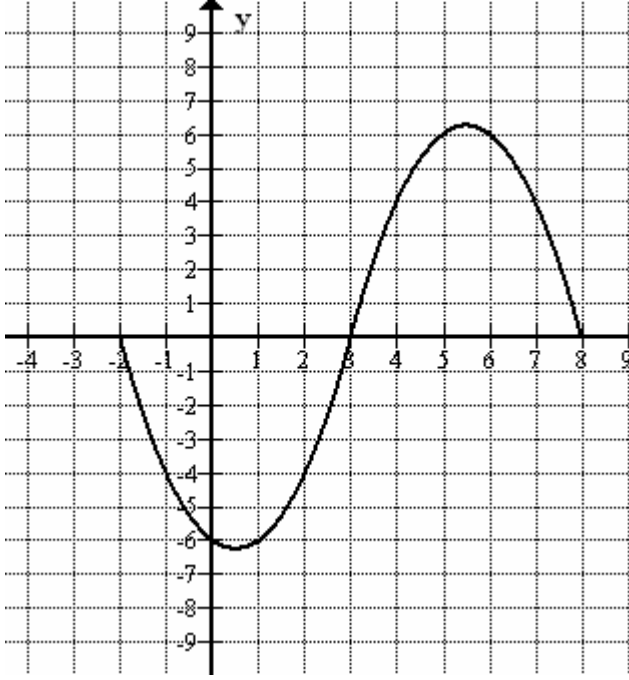
(ج) متي يمر الجسم بنقطة الأصل .

.....
.....

(د) حدد الفترات التي يتحرك فيها الجسم نحو نقطة الأصل ، والفترات التي يتحرك بعيداً عن نقطة الأصل .

.....

(9) ليكن $G(X) = \int_{-2}^X f(t)dt - 1$ ، f دالة متصلة مجالها $[-2, 8]$ و المبين رسمها البياني .



(أ) أوجد $G(-2)$, $G(8)$

.....
.....
.....
.....

(ب) عين أكبر قيمة للدالة G .

.....
.....

(ج) عين قيم x التي تكون عندها G أكبر ما يمكن و أصغر ما يمكن .

.....
.....

(10) أوجد قيمة k إذا كان: $f(x) = \sec x \tan x$ ،

$$\int_0^x f(t)dt + k = \int_x^{\pi} f(t)dt$$

.....
.....
.....
.....

(11) أوجد قيمة k إذا كان: $f(x) = \cos x \csc x$ ،

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)dt + k = \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$$

.....
.....
.....
.....

النظرية الأساسية الجزء (2) : إذا كانت الدالة f متصلة على $[a, b]$ و كانت الدالة F هي المشتقة العكسية للدالة (تكامل) f في الفترة $[a, b]$ فإن

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

باستخدام النظرية الأساسية (الجزء 2)

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2 + 1)dx$$

.....

$$(2) \int_1^9 \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

.....

$$(3) \int_0^4 (\sqrt{x} + 2x) dx$$

.....

$$(4) \int_0^{2\pi} (\sin x) dx$$

.....

$$(5) \int_{-1}^1 (e^{2x}) dx$$

.....

$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec x \tan x) dx$$

.....

$$(7) \int_{-1}^2 |x| dx$$

.....

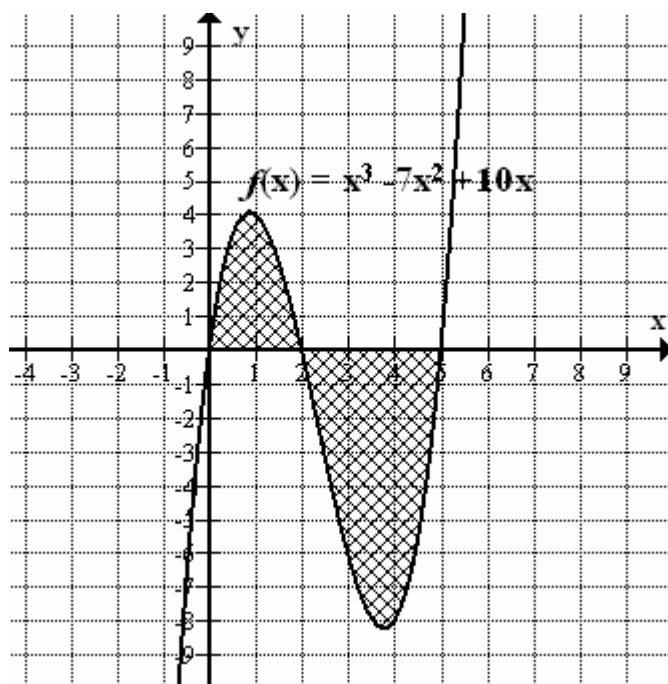
.....

.....

.....

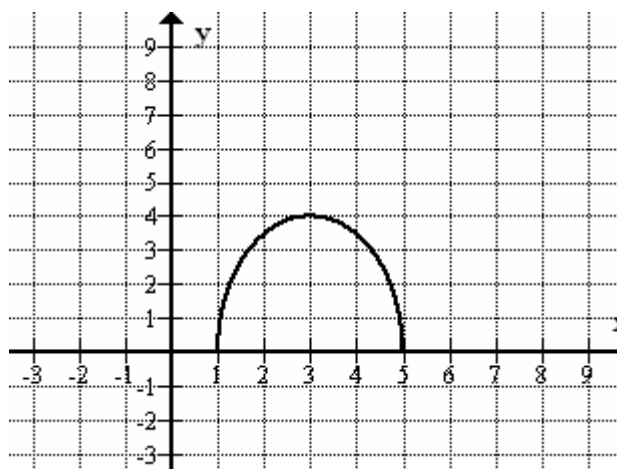
(8) أوجد المساحة الكلية للمنطقة المحصورة بين المنحني و محور السينات .

$$(a) f(x) = -x^3 - 7x^2 + 10x$$



=====

$$(b) y = \sqrt{16 - 4(x-3)^2}$$



أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int (2x+1)^9 dx$

أرشد ضع $u=2x+1$

.....

.....

.....

.....

(2) $\int \frac{dx}{(1-3x)^9}$

.....

.....

.....

.....

(3) $\int \sqrt[3]{(x-4)} dx$

.....

.....

.....

.....

(4) $\int (x^2-3)^5 x dx$

(أرشد ضع $u = x^2-3$)

.....

.....

.....

.....

(5) $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^5 \frac{dx}{x^2}$

إرشد : ضع $u = 1 - \frac{1}{x}$

.....

.....

.....

.....

$$(6) \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$$

إرشاد : ضع $u = \cos x$

.....

.....

.....

$$(7) \int \sin^7 x \, dx$$

(أرشاد ضع $u = \cos x$)

.....

.....

.....

.....

$$(8) \int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$$

(أرشاد ضع $u = \sqrt{1-x}$)

.....

.....

.....

.....

.....

$$(9) \int \sin^2 (\sin x) \cos x \, dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(11) \int \frac{x^3}{(x^2-1)^2 (x^2+1)^2} \, dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(12) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} \, dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(13) \int \sqrt[3]{x^3 + x^5} \, dx$$

(إرشاد ضع $u = x^2 + 1$)

$$(14) \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x} \, dx$$

$$(15) \int x(x-5)^7 \, dx$$

$$(16) \int (x+3)(2-x)^5 \, dx$$

إرشاد ضع $u = 2-x$

$$(17) \int (x-3)(x^2 - 4x + 7)^{3/2} \, dx$$

$$(18) \int x^2(x^2 - 3)^4 \, dx$$

$$(19) \int (x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 1} \, dx$$

$$(20) \int \frac{2}{x^2} \left(3 - \frac{4}{x}\right)^3 dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(21) \int x^7 \left(1 + \frac{3}{x}\right)^7 dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(22) \int (x^2 - 6x + 9)^4 dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(23) \int \frac{1}{\sqrt{x} (2\sqrt{x} + 1)^2} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(24) \int x^{10} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^9 dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(25) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(26) \int \cot^2 x \csc^2 x dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(27) \int (\cot^3 x \csc x)^2 dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(28) \int \frac{x \sin \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(29) \int \frac{\csc^2 (1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(30) \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(31) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}} dx$$

.....

.....

.....

$$(32) \int_1^4 (4x^2 - 4x + 1) dx$$

.....

.....

.....

$$(33) \int \frac{1}{x^{10} + x} dx$$

(إرشاد : ضع $u = \frac{1}{x}$)

.....

.....

.....

.....

$$(1) \int f(x) \times f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + c \quad : \quad \text{ملاحظة هامة}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \times \frac{1}{x} dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$$(2) \int f^n(x) \times f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(2x + 1) dy + (3y + 2) dx = 0$$

.....

.....

.....

$$\int (x-2)(x+3) dx$$

.....

.....

$$\int x \sin x^2 dx$$

.....

.....

في ضوء معلوماتك السابقة هل يمكن إيجاد

$$\int x \sin x dx$$

.....

.....

$$\int u dv = uv - \int v du$$

قاعدة :

تمارين : أوجد التكاملات التالية بالتجزئ

$$(1) \int x \cos x dx$$

$$\text{Let } u = x \quad ; dv = \cos x dx$$

$$du = dx \quad ; v = \sin x$$

$$\therefore \int x \cos x dx = \dots\dots\dots - \int \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots - \dots\dots\dots + c$$

$$(2) \int x e^x dx$$

$$\text{Let } u = \dots\dots\dots ; dv = \dots\dots dx$$

$$du = \dots\dots\dots ; v = \dots\dots$$

$$\therefore \int x e^x dx = \dots\dots\dots - \int \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots - \dots\dots\dots + c$$

ملاحظة: إذا احتوت الدالة على جزء كثيرة حدود فنرمز له بالرمز u وللجزء الآخر بالرمز dv

$$(3) \int x^2 \sin x dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(4) \int x^2 \sqrt{1-x} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(5) \int \frac{3x}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(6) \int e^x \sin x dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(7) \int \frac{3x+2}{\sec(4x-1)} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(8) \int \frac{x^2}{\csc(4x-1)} dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(9) \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx$$

.....

.....

.....

.....

$$(10) \int_1^e \ln x dx$$

.....

.....

.....

.....

التكامل الجدولي :

مثال : استخدم التكامل الجدولي في إيجاد $\int x^2 \cos x dx$

الإشارات	$f(x)$ ومشتقاتها	$g(x)$ وتكاملاتها
+	x^2	$\cos x$
-	$2x$	$\sin x$
+	2	$-\cos x$
-	0	$-\sin x$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + c$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

باستخدام التكامل الجدولي : أحسب

(11) $\int x^2 \sin x dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(12) إذا كان $f(2)=5, f(0)=2, f'(2)=1, f'(0)=-2, f''(2)=3, f''(0)=2$ فاحسب قيمة

$$\int_0^2 x^2 f'''(x) dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

(13) $\int e^x \sin x dx$

.....

.....

.....

.....

أحسب التكاملات التالية :- (أولا : درجة البسط أقل من درجة المقام)

(1) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

.....
.....

(2) $\int \frac{x}{x^2+4x-5} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

(3) $\int \frac{4}{x^2-2x-3} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(4) $\int \frac{x-1}{x^2-4} dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

(5) $\int \frac{x+2}{x^2+7x+12} dx$

.....
.....
.....
.....

ملاحظة إذا احتوي المقام على عامل مكرر (x-a)

$$(6) \int \frac{x+2}{x(x-1)^2} dx$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x+2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$x=0 \therefore 0+2 = A(0-1)^2 \Rightarrow A=1$$

$$x=1 \therefore 1+2 = C \times 1 \Rightarrow C=3$$

$$x=2 \therefore 2+2 = 1(2-1)^2 + B \times 2(2-1) + 3 \times 2 \Rightarrow 4-7 = 2B \Rightarrow B = \frac{-3}{2}$$

ونترك للطالب إكمال الحل

.....
.....
.....
.....
.....

$$(7) \int \frac{2}{x(x+1)^2} dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

$$(8) \int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ثانياً إذا كانت درجة البسط أكبر أو يساوي درجة المقام

نكتب الدالة $f(x)$ على الصورة $q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$

نوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب $\frac{r(x)}{h(x)}$ - نوجد التكامل كما سبق

$$(9) \int \frac{x^2}{x^2 + x - 2} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(10) \int \frac{x^2 - x}{x^2 - 9} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(11) \int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + x - 2} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(12) \int \frac{2x^3 - 4x^2 + 8}{x^3 - 4x} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$(13) \int \frac{x^2 + 2}{x + 2} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$14) \int \frac{6x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$15) \int \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(16) \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 2x + 1}$$

.....

.....

.....

.....

$$(17) \int \frac{(x+1)}{x^2 + 4x - 5} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

$$(18) \int \frac{(1+x^2)}{x(x^2-1)} dx$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد الكسور الجزئية المكافئة للكسر المركب

$$(1) \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 1}$$

.

$$(2) \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x}$$