وزارة التربية والتعليم

مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر 12

علمي

كتاب المعلّم

الجزء الأوّل

لجنة مواءمة كتب الرياضيات – سلسلة الفراشة:

1. **أحمد علي أبو يوسف.**
2. **حسام أسعد البكري.**
3. **عماد جريس البخيت.**
4. **مؤنس عبد الحليم محمد.**
5. **يوسف شاهين محمد.**

مكتبة لبنان ناشرون

جَميع الحقوق مَحفوظة: لا يَجوز نشْر أيّ جُزء من هذا الكِتاب أو تَصويره
أو تَخزينه أو تَسجيله بأيّ وَسيلَة دُون مُوَافقَة خطّيَّة مِنَ النّاشِر.

المحتويات

الصفحة

مقدمة دليل المعلم	4
ماذا عن كتاب الطالب؟	5
الرياضيات (الجزء 1) (منظومة المحتوى)	6
أسس تربوية عامة في تدريس الرياضيات	7
أهداف تدريس الرياضيات	8
إستراتيجيات عامة للتدريس	9
وسائط تعليمية عامة	10
محتوى الجزء الأول للصف الثاني عشر	11
مصفوفة تحليل المحتوى	12
مصفوفة المدى والتتابع	21
أهداف خاصة لتعليم الوحدات الثلاث في الجزء الأول	22
الوحدة الأولى: النهايات والاتصال	24
معدلات التغير والنهايات	26
الاتصال	31
معدلات التغير وخطوط المماس	34
اختبار الوحدة	36
الوحدة الثانية: المشتقات	40
مشتقة دالة	42
قابلية الاشتقاق (التفاضل)	45
قواعد الاشتقاق	48
مشتقات الدوال المثلثية	52
قاعدة السلسلة	55
اختبار الوحدة	60
الوحدة الثالثة: تطبيقات المشتقات/التفاضل	62
القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال	64
الدوال المتزايدة والمتناقصة	67
ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	71
النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى)	74
المعدلات المرتبطة	79
اختبار الوحدة	82

مقدمة كتاب المعلم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب لمعلّمي مادة الرياضيات للصف الثاني عشر (الثالث من مرحلة التعليم الثانوي)، أن نؤكّد أن هذا الكتاب قد تمَّ إعدادُه ليكون أداة مساعدة، يستنير بها المعلِّم في تحسين أدائه، وجعل تدريسه عملية وظيفية تستند في المقام الأول إلى أسس تربوية سليمة، في ضوء نظريات التعلم الحديثة، بحيث يكون دور المعلم ميسرًا لعملية التعلم، لإعداد قادة المستقبل من الشباب في عصر العلم والتقنية، اللَّذَيْن أصبحا من ضرورات الحياة للإنسان المعاصر.

ومن هذا المنطلَق كان من الضروري؛ بل من المحتم؛ لمعلِّم الرياضيات فهمُ فلسفة المقرر الذي يعالجه، والذي وضع في ضوء المناهج المطورة التي تضعها وزارة التربية والتعليم، والتي تهتم بالآتي:

(1) تأكيد مبدأ استمرارية التعلُّم مدى الحياة، من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمي، وأن يمارسوا التعلُّم الممتزج بالمتعة والتشويق؛ وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات، وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلُّم الذاتي، والعمل التعاوني بروح الفريق، والمناقشة والحوار وتقبُّل آراء الآخرين، والموضوعية في إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

(2) تقديم رُؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتقنية والمجتمع science, technology, and society (STS) تعكس دور التقدُّم العلمي في تنمية المجتمع المحلي، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب للتصرُّف الواعي والفعّال حِيالَ استخدام الأدوات التقنية.

(3) التركيز على تبصير الطلاب بالمفاهيم والمبادئ الرياضية المتعلِّقة بالأنشطة الحياتية، وتنمية اتجاهات إيجابية للطلاب تُجاه الرياضيات ودراستها، لتقدير إيجابياتها كأداة فاعلة في الحياة.

(4) تزويد الطلاب بثقافة شاملة مبنية على رؤية واضحة داخل الإطار البيئي الذي يعيشون فيه، من خلال تنمية الاتجاهات الإيجابية لحسن استخدام الموارد والإمكانات المتاحة.

(5) تنمية وتعميق الانتماء للوطن بإظهار دور الدولة فيما تقدِّمه من خِدْمات تعود بالخير والنفع في جميع المناحي الحياتية.

ماذا عن كتاب الطالب؟

1- يتفق محتوى الكتاب مع جميع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات، والأهداف الخاصة لمقرر الصف الثاني عشر، ويظهر ما بين محتوى وحداته من ترابط وتكامل.

2- استهلال كل وحدة من وحدات الكتاب بافتتاحية تحوي:

- تهيئة للتشويق وتكوين دافعية لدى الطالب، وذلك لاستقراء واستكشاف محتوى الوحدة.
- عرضًا لدروس الوحدة.
- مجموعةً من الأنشطة المتنوِّعة، تتضمن أنشطة استكشافية وأخرى لربط الخبرات السابقة للطلاب بموضوعات المقرر.

3- يبدأ كل درس من دروس كلِّ وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس.

4- ينتهي كلُّ درس من كلِّ وحدة بمجموعة من التمارين والتدريبات التي تنتقل من الاستفهام المباشر إلى التفكير المتعمق.

5- يتضمَّن محتوى كلِّ وحدة مجموعةً من المعالم المتميزة، والمرتبطة ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الوحدة تتضمن أنشطة تربوية من مثل: (تطبيقات حياتية، مسألة للتفكير، دعنا نفكِّر ونتناقش، عمل تعاوني، تفكير ناقد).

6- تنتهي كلُّ وحدة باختبار يشتمل على العديد من الأسئلة ويتضمن أسئلة موضوعية بنوعياتها المختلفة، والمقالية بنوعياتها، وذات الإجابات القصيرة، كما رُوعي ما طرأ من تحديث وتطوير في مجال بناء الاختبارات التقويمية.

7- يتضمَّن الكتاب الأشكالَ والرسوم التي جاءت مرتبطةً ارتباطًا وثيقًا بموضوعات الكتاب، وقد تمَّ توظيفُها بشكل يمكِّن الطالبَ من إدراك العلاقات بين المتغيِّرات، من خلال عمليات التفسير والتحليل والاستنتاج.

دور الكتاب للمعلم:

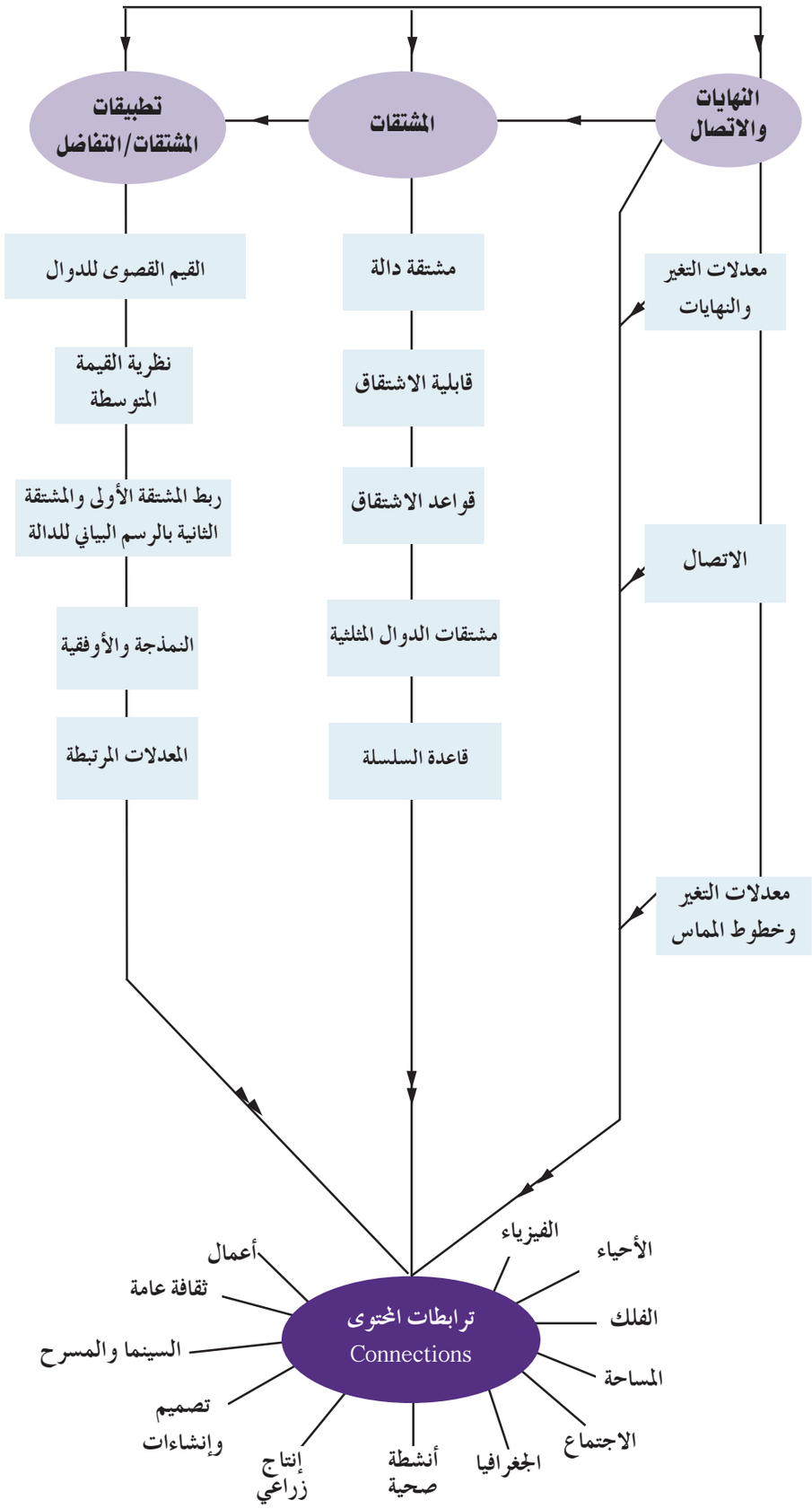
إنَّ تَناوُلَنا لكلِّ وحدة من الوحدات المقررة على حِدَةٍ في هذا الكتاب من حيث الأهداف والخطة الزمنية والمعالم والوسائط التعليمية وطرق تدريس المحتوى والتقويم – ليس الهدف منه وضع قيدٍ على المعلِّم، بحيث نحد من حريته في تناول ومعالجة كلِّ وحدة أو إلزامه بأسلوب معين، بل هو محاولةٌ من جانبنا نقدِّمها للمعلِّم، كي تنير له الطريق وتمهِّد السبيل لتحقيق الأهداف المنشودة، في الوقت الذي نقدِّر فيه أنَّ لكل معلِّم شخصيتَهُ المميزة ومهاراتِهِ وإبداعاته الخاصة به.

وأخيرًا ... فإننا نتمنى أن يكون هذا الدليل في مستوى طموحات زملائنا المعلِّمين، وأن يجدوا فيه عونًا لهم على أداء رسالتهم التربوية النبيلة حتى تتحقق الأهداف المرجوَّة.

والله من وراء القصد وهو يهدي إلى سواء السبيل.

ماذا عن كراسة التمارين؟

لقد روعي في إعداد كراسة التمارين للصف الثاني عشر أن تتضمن عددًا كبيرًا من التمارين والمسائل المتنوعة، وذلك لإعطاء المتعلم فرصة للتدرب على إتقان المهارات، وتنمية قدرته على حل المسائل الرياضية من جهة، ومراعاة الفروق بين المتعلمين من جهة أخرى. ولتحقيق هذه الغايات تم وضع التمارين والمسائل في كل بند في مجموعتين الأولى «A» بعنوان «تمارين أساسية» وتتضمن تمارين ومسائل ينبغي أن يحلها المتعلمون – يمكن إعطاء بعضها كواجبات بيتية – ومناقشة أفكارها وحلولها معهم. والمجموعة الثانية «B» بعنوان «تمارين تعزيزية وإثرائية» يمكنك حل أو مناقشة بعضها وفق حاجات طلبتك لتعزيز تعلمهم وإثرائه. وتترك ما يتبقى منها للطلبة ليحل كل منهم ما يتناسب مع قدراته وإمكاناته وحاجاته خارج غرفة الصف، ولست ملزمًا بحلها ومناقشتها في الحصص الصفية.


النهايات والاتصال
المشتقات
تطبيقات المشتقات/التفاضل
معدلات التغير والنهايات
الاتصال
معدلات التغير وخطوط المماس
مشتقة دالة
قابلية الاشتقاق
قواعد الاشتقاق
مشتقات الدوال المثلثية
قاعدة السلسلة
القيم القصوى للدوال
نظرية القيمة المتوسطة
ربط المشتقة الأولى والمشتقة الثانية بالرسم البياني للدالة
النمذجة والأوفقية
المعدلات المرتبطة
ترابطات المحتوى
Connections
الفيزياء
الأحياء
الفلك
المساحة
الاجتماع
الجغرافيا
أنشطة صحية
إنتاج زراعي
تصميم وإنشاءات
السينما والمسرح
ثقافة عامة
أعمال

أسس تربوية عامة في تدريس الرياضيات

تقديم

- يجري تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية على شكل وحدات دراسية موزعة بين صفوف المرحلة، وبين التصنيفات الرياضية المعروفة: حساب المثلثات والهندسة التحليلية والجبر والهندسة الفراغية والإحصاء والاحتمال وحساب التفاضل والتكامل calculus بشقيه: التفاضل differentiation والتكامل integration. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسيًّا (عَبر الصفوف) وحلزونيًّا في كل فرع، ويتوزع أفقيًّا (في كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس – إلى حد ما – وحدة الفكر الرياضي. ويراعى في جميع الحالات التناغم الرياضي لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

أهداف تدريس الرياضيات

الرياضيات مادَّة حيَّة تنمو وتتطوَّر، وقد نشأت أصلاً لِخِدْمة حاجة الإنسان في حياته العملية، وما زالت هي الأداة الأساسية لحل المشكلات وخِدْمة العلوم الأخرى، بل إن التقدُّم التقني المعاصر هو تقدم يستند إلى الأساليب الرياضيَّة، والنماذج الرياضيَّة التي تستخدم لبناء وتطوير الأجهزة والبرمجيات التي تستخدم فيها. ولا يقتصر استخدام الرياضيات على العلوم الطبيعيَّة والهندسية والطِّبِّيَّة والزراعية والفيزيائيَّة، ولكنها تستخدم أيضًا في العلوم الإنسانية والاجتماعية بل وفي الفنون واللغويات. من ناحية أخرى فإن الرياضيات ذاتها تتقدَّم وتتطوَّر، فهي من حين لآخر تلتفت إلى نفسها لتعيد بناء وترتيب تركيباتها وأساليب براهينها ومعالجتها، ومن ثم فهي دائمًا تأتي بالجديد سواء ظهر بصور رياضيَّة بحتة أو من خلال التَّطبيقات الواسعة، خاصَّة في الاقتصاد وفي وسائط الاتِّصال الإلكتروني وتقنية المعلومات، ومعادلات ومتباينات التوقعات في المجالات المختلفة. ولا شك في أنّ المعلم لا بد أن يكون على وعي ودراية ولديه ثقافة رياضية عامة عن المادة التي يقوم بتدريسها.

والمعلم – بطبيعة الحال – يواجه دائمًا بالسؤال العتيد «لماذا نعلِّم الرياضيات؟»

هناك أكثر من طريقة للتعريف بأهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

(1) أهداف معرفية Cognitive

تتعلَّق بالمفاهيم والنَّظريات والمهارات العقليَّة المتدرجة والمتنوعة في تعلُّم معارف رياضيَّة كثقافة عامة أو كإعداد لدراسات تالية في المراحل التعليميَّة المتتابعة. وهناك ثلاثة مستويات معرفية: مستوى أدنى، ويتضمَّن مجرد تذكُّر المعلومات واستيعابها. ومستوى متوسط، ويتضمَّن التطبيقاتِ المباشرة لما يتعلمه الطالب من قوانين ونظريات. ومستوى أعلى، ويتضمن تنمية مهارات التفكير العليا، وحل المشكلات بما تتطلبه من تحليل وتركيب وتقويم لمسائل وعلاقات ومواقف رياضية وتطبيقية.

(2) أهداف وجدانيَّة Affective

تتعلَّق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشري، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها في التَّقدُّم ونحو أساليبها في التفكير ودقة لغتها في الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البياني.

(3) أهداف نفسحركية Psychomotor

يقصد بها تنمية مهارات عملية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضي هندسي أو حسابي أو حوسبي (متعلقة بالحاسوب) سواء في صورة آلات حاسبة calculators أو حواسيب computers، وأن يكتسب الطالب مهارات استخدام التقنية المتاحة من أجهزة وأقراص مدمجة CDs جاهزة مناسبة.

إستراتيجيات عامة للتدريس

إستراتيجية التدريس: هي خطة تحركات المعلم في تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسي للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاحُ الإستراتيجية بمدى كفاءتها في أن يتعلَّم الطلاب ما قصد لهم أن يتعلموه بغرض مساعدة الطلاب في أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التي يتعلمونها في ضوء النظرية البنائية constructivism.

وتتضمن إستراتيجية التدريس أن يقوم المعلم بالآتي:

– التقدُّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).

– إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.

– توزيع العمل بين أعمال تعاونية في مجموعات صغيرة تعمل تعاونيًّا، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.

– في نهاية كل مناقشة أو عمل تعاوني أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمنًا الأساسيات: وهي عبارة عن تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.

– إعطاء الطلاب فرصًا داخل الصف أو في المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.

– تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.

– عند تدريس أي مفهوم أو علاقة بين عدة مفاهيم يطلب المعلم إلى الطلاب إعطاء أمثلة تمثل المفهوم أو تحقِّق العلاقة، وأخرى لا تمثلها أو لا تحقِّقها.

– ابتعاد (المعلم) عن الشرح طوال الوقت وكتابة الحلول جاهزة كاملة على اللوح وطلب نقلها في الكراسات من دون مناقشة أو محاولات مسبقة من الطلاب.

– تنويع السلوكيات (أي طرق التدريس) في الحصة الواحدة.

– الحرص على إعطاء رعاية خاصة في فترة العمل الفردي أو في المجموعات التعاونية للطلاب بطيئي التعلم أو من هم دون المستوى في قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.

– تنويع الواجبات سواء داخل الصف أو في المنزل مع مراعاة الفروق الفردية – ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين في الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيقُدَّم لهم الحد الأدنى، ويُلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل مُتدرِّجين في الواجبات.

– تحديد بعض الساعاتِ للمساعدة خارج الصف في مكتب المعلم أو في المكتبة.

– مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق في هذا المقرر.

وسائط تعليمية عامة

الوسيط التعليمي هو مادَّة تعليمية مكتوبة أو مرسومة ، أو صورة ثابتة أو متحرِّكة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراصٍ مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة في عرض واستخدام الموادِّ التعليميَّة والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليميُّ مُلْصقًا أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعًا خشبيَّة أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوبًا، وقد تكون موادَّ من الطبيعة أو مصنَّعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معمليَّة.

والأصل في الوسيط التعليمي هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملاً تعليميًّا نشيطًا، لا أن يكتفي بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آليًّا، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بياني لأحد الجداول أو الدوال الجبرية مستخدمًا برنامج اللوحة الجدولية spreadsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO).

والمبدأ الذي نرتئيه هنا هو أن التقنية بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعدِّدة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم» – بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم في تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

محتوى الجزء الأوّل
للصف الثاني عشر

يتناول المحتوى ثلاث وحدات هي:

	عدد الحصص المقترح
1) النهايات والاتصال – معدلات التغير والنهايات – الاتصال – معدلات التغير وخطوط المماس	**23**
2) المشتقات – مشتقة دالة – قابلية الاشتقاق (التفاضل) – قواعد الاشتقاق – مشتقات الدوال المثلثية – قاعدة السلسلة	**30**
3) تطبيقات المشتقات/التفاضل – القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال – الدوال المتزايدة والمتناقصة – ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بالرسم البياني للدالة f – النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى) – المعدلات المرتبطة	**32**

مصفوفة تحليل المحتوى

الوحدة 1	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
النهايات والاتصال	– معدلات التغير والنهايات	–السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – النهاية – نظرية الشطيرة	– إيجاد السرعة اللحظية – إيجاد النهاية – العمليات على النهايات عندما $x \longrightarrow a$ – استخدام نظرية الشطيرة
	– الاتصال	– الدوال المتصلة	– إيجاد نقاط الاتصال ونقاط الانفصال – التخلص من الانفصال – العمليات على الدوال المتصلة
	– معدلات التغير وخطوط المماس	– متوسط التغير – ميل المماس لمنحنى – ميل الخط العمودي على المنحنى – ميل المنحنى – السرعة	– إيجاد متوسط التغير – إيجاد معادلة المماس على المنحنى – إيجاد معادلة الخط العمودي

الوحدة 2	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
المشتقات	الاشتقاق قابلية الاشتقاق	– المشتقة – المشتقة من جهة واحدة	– إيجاد العلاقة بين الرسم البياني للدالة والرسم البياني لمشتقتها – إيجاد المشتقة – العمليات على الاشتقاق – إيجاد مشتقات ذات الرتب العليا
	مشتقات الدوال المثلثية	– مشتقة دالة الجيب وجيب التمام – الحركة التوافقية البسيطة – مشتقات الدوال المثلثية الأساسية الأخرى	– إيجاد مشتقة دالة الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام (cot) وقاطع الجيب (csc) وقاطع جيب التمام (sec)
	قاعدة السلسلة	– مشتقة دالة الدالة – ميل المنحنيات البارامترية – قاعدة سلسلة القوى	– إيجاد مشتقة دالة الدالة – تطبيق قاعدة من الخارج إلى الداخل – تطبيق قاعدة السلسلة

الوحدة 3	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
تطبيقات المشتقات (التفاضل)	القيم القصوى والقيمة المتوسطة	– القيم القصوى المطلقة الصغرى والعظمى – القيم القصوى المحلية (النسبية) – القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة والمتناقصة	– إيجاد قيم قصوى – إيجاد النقطة الحرجة – إيجاد القيمة المتوسطة – إيجاد الدالة المتزايدة – إيجاد الدالة المتناقصة – إيجاد السرعة اللحظية
	ربط المشتقتين الأولى والثانية بالرسم البياني لدالة. النمذجة والأوفقية	– اختبار المشتقة الأولى والثانية – التقعر – نقاط الانقلاب	– رسم مستطيلات محاطة بمنحنيات – التعلم عن الدالة من مشتقاتها – استخدام اختبار المشتقة الأولى – إيجاد التقعر – إيجاد نقاط الانقلاب – استخدام اختبار المشتقة الثانية
	المعدلات المرتبطة	– معادلات المعدلات المرتبطة – محاكاة الحركة المرتبطة	– إيجاد معادلات المعدلات المرتبطة

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
– السرعة المتوسطة $= \dfrac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ – السرعة اللحظية $= V(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h}$ – إذا كان c، L عددين حقيقيين، فالدالة f يكون لها نهاية L عندما تقترب x من c. إذا كان بالإمكان جعل الفرق بين $f(x)$ و L قريبًا من الصفر أو يساويه بأخذ قيم للمتغير x قريبة جدًّا من c، $x \neq c$ ونكتب $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$. نهاية الدالة الثابتة حيث k ثابت $\lim\limits_{x \to c}(k) = k$ نهاية الدالة المحايدة عند $x = c$ $\lim\limits_{x \to c}(x) = c$ – ويمكننا حساب النهايات لدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية، وهذه الحقائق موضحة في نظرية (1). – إذا كانت L، M، c، k أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ، $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ ، فإن: **(1) قاعدة الجمع:** $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = L + M$ نهاية مجموع دالتين هي مجموع نهايتيهما. **(2) قاعدة الفرق:** $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = L - M$ نهاية الفرق بين دالتين هي الفرق بين نهايتيهما. **(3) قاعدة الضرب:** $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$ نهاية حاصل ضرب دالتين هي حاصل ضرب نهايتيهما. **(4) قاعدة الضرب في ثابت:** $\lim\limits_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$ نهاية ثابت مضروب في دالة هي حاصل ضرب الثابت في نهاية الدالة. **(5) قاعدة ناتج القسمة:** $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \; M \neq 0$ نهاية ناتج قسمة دالتين هي ناتج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تساوي نهاية المقام صفرًا. **(6) قاعدة القوى:** إذا كان r، s عددين صحيحين، $s \neq 0$ ، $\lim\limits_{x \to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$ على شرط أن $L^{r/s}$ عدد حقيقي. نهاية دالة لجهة اليسار $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ نهاية دالة لجهة اليمين $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$ – الدالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت، النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند c موجودتين، وكلتاهما تكونان متساويتين $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = L$	– سرعة سقوط صخرة من تل.

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
نظرية الإحاطة (الشطيرة): – تتعلق هذه النظرية بدالة f قيمها بين قيم دالتين أخريين g، h. إذا كان للدالتين g، h النهاية نفسها عندما $x \longrightarrow c$ فإن للدالة f أيضًا هذه النهاية. – نقطة داخلية: تكون الدالة $y = f(x)$ **متصلة عند نقطة داخلية c** في مجالها إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ – نقطة طرفية (حدية): تكون الدالة $y = f(x)$ **متصلة عند نقطة طرفية جهة اليسار (a)** أو **نقطة طرفية جهة اليمين (b)** في مجالها إذا كان $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ أو $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ – إذا كانت الدالة f غير متصلة عند نقطة c، فنعبر عن ذلك بأن f غير متصلة عند c، c هي نقطة انفصال للدالة f مع ملاحظة أن c ليست بحاجة إلى أن تكون في مجال f. تكون الدالة متصلة على فترة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند جميع نقاط الفترة. – إذا كانت f، g دوال متصلة عند $x = c$ فإن التوافقات التالية لدوال هي دوال متصلة عند $x = c$. **(1)** الجمع: $f + g$ **(2)** الطرح: $f - g$ **(3)** الضرب: $f \cdot g$ **(4)** الضرب في ثابت: $k \cdot f$ حيث k أي عدد **(5)** ناتج القسمة: f/g بشرط $g(c) \neq 0$	
– متوسط التغير لدالة على فترة، هو قيمة ذلك التغير مقسومًا على طول تلك الفترة. – ميل المنحنى للدالة f في نقطة $x = a$ هو: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا وجدت. – الخط العمودي على منحنى عند نقطة معرفة هو الخط العمودي على المماس للمنحنى عند تلك النقطة.	– النمو في المختبر

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
– الدالة المشتقة للدالة f بدلالة x هي: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ إذا وجدت. أو $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وهي المشتقة في $x = a$ إذا وجدت. – دالة مشتقة لجهة اليمين $f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ – دالة مشتقة لجهة اليسار $f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ – تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في نقطة $x = a$ إذا وفقط إذا كان $f'(a^-) = f'(a^+)$. – إذا كانت الدالة f لها اشتقاق عند نقطة $x = a$ فهي متصلة عند هذه النقطة. ولكن العكس لا يكون دائمًا صحيحًا. – قواعد الاشتقاق: $\frac{dc}{dx} = 0$; $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ $\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$; $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v$; $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} (v \neq o)$	
– معدل التغير عند $x = a$: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
– اشتقاق الدوال المثلثية: $\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x\\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x\\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x\end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x\\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x\end{aligned}\right\}$ – الحركة التوافقية البسيطة: $\left.\begin{aligned}f(t) &= a\cos t\\ &\text{أو}\\ g(t) &= a\sin t\end{aligned}\right\}$ – اشتقاق دالة الدالّة: $y = f(u)$ حيث $u = u(x)$ $y = f(g(x))$ حيث $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x)$ أو $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ – دالة الاشتقاق لدالّة القوى: $y = f(u) = u^n$ $u = u(x)$ $\frac{d}{ds}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$	
– إذا f دالة مجالها D، فإن $f(c)$ تكون: (أ) القيمة العظمى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \le f(c)$ لكل x تنتمي إلى مجال D. (ب) القيمة الصغرى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \ge f(c)$ لكل x تنتمي إلى مجال D. – إذا كانت f دالة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى على هذه الفترة.	

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
– إذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f، فإن $f(c)$ تكون: (أ) قيمة عظمى محلية عند c إذا وفقط إذا كانت $f(x) \le f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c. (ب) قيمة صغرى محلية عند c إذا وفقط إذا كانت $f(x) \ge f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c. – إذا كان لدالة f قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية عند نقطة داخلية c في مجالها، وكانت f' لها وجود عند c، فإن $f'(c) = 0$. – النقطة الحرجة لدالة f هي نقطة داخلية في مجال الدالة يكون عندها $f' = 0$ أو f' غير موجودة. – إذا كانت $y = f(x)$ متصلة عند كل نقطة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة تنتمي لداخلها (a, b) فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل c في (a, b) يكون عندها $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ – لتكن f دالة معرفة على الفترة I ولتكن x_1 ، x_2 أي نقطتين في الفترة I. (1) f دالة تتزايد على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (2) f دالة تتناقص على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$، وقابلة للاشتقاق على (a, b) . (1) إذا كانت $f' > 0$ عند كل نقطة في (a, b)، فإن f تتزايد على $[a, b]$. (2) إذا كانت $f' < 0$ عند كل نقطة في (a, b)، فإن f تتناقص على $[a, b]$. – إذا كان $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $f(x) = C$ لكل x في I. – إذا كان $f'(x) = g'(x)$ عند أي نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $f(x) = g(x) + C$ لكل x في I.	

قوانين ونظريات	تطبيقات حياتية
– ينطبق الاختبار الآتي على دالة متصلة $f(x)$. عند أي نقطة حرجة c: **(1)** إذا كانت المشتقة f' تتغير إشارتها من الموجب إلى السالب عند c $(f' > 0$ ، عندما $x < c$ ، $f' < 0$ ، عندما $x > c)$، فإن الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c. **(2)** إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند c $(f' < 0$ عندما $x < c$ ، $f' > 0$ عندما $x > c)$، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c. **(3)** إذا لم تتغير إشارة f' عند c (f' يكون لها الإشارة نفسها على جانبي c)، فإن f لا يكون لها قيمة متطرفة محلية عند c. – إذا كان $f' < 0$ (أو $f' > 0$) لكل $x > a$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية (أو قيمة صغرى محلية) عند النقطة a. – إذا كانت $f' < 0$ (أو $f' > 0$) لكل $x < b$ ، فإن الدالة f تكون لها قيمة صغرى محلية (أو قيمة عظمى محلية) عند b. – الرسم البياني لدالة قابلة للاشتقاق $y = f(x)$ يكون (أ) **مقعرًا لأعلى** في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متزايدة في الفترة I. (ب) **مقعرًا لأسفل** في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متناقصة في الفترة I. – النقطة التي عندها يكون للرسم البياني لدالة خط مماس ويتغير تقعر المنحنى على جانبيها هي نقطة انقلاب. **(1)** إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$. **(2)** إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$.	– السقوط من موقع – استخدام انحدار – تصنيع صندوق – تصميم علبة أسطوانية الشكل – إنشاء مخروطات – القيمة العظمى للربح – تخفيض التكلفة
– القيمة العظمى للربح (إذا وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية. – مستوى التكلفة (إذا وجد) الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن هو المستوى الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية.	– التقدير التقريبي للمساحة السطحية للأرض – مطاردة على الطريق السريع – ملء خزان مخروطي الشكل – سلم منزلق على حائط

المفهوم	النهايات والاستمرار	المشتقات	تطبيقات المشتقات
– الأعداد الحقيقية	–حساب النهايات	– مشتقة دالة في نقطة	– القيم القصوى (الصغرى والعظمى)
النسبة	– معادلات التغير	– قاعدة الاشتقاق	– السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية
المعادلة	– خطوط المماس – خطوط عمودية		
الهندسة			– إيجاد أصغر محيط – تصميم صفحة – تصميم علبة أسطوانية
ترابط (connection)			– حركة ثقل معلق في لولب – مطاردة على الطريق السريع
تواصل (communication)	– أعداد ورموز وجمل رياضية وأشكال بيانية	– أعداد ورموز وجمل رياضية ورسوم بيانية	– أعداد ورموز وجمل رياضية وجمل لفظية وتمثيلات بيانية وسلوك طرفي منحنى الدالة

أهداف خاصة لتعليم الوحدات الثلاث في الجزء الأوّل

في ضوء الأهداف العامة السابقة وتناغمًا مع ما سبق للطالب دراسته وما هو متوقع أن يدرسه من رياضيات، فقد تم اختيارُ ثلاث وحدات للجزء الأوّل بقصد أن يكتسب الطالب الآتي:

أولاً: بالنسبة إلى وحدة النهايات والاتصال:

(1) تعرف النهايات المحدودة للمتغير وللدالة.

(2) استخدام معدلات التغير.

(3) تعرف الاتصال في الدالة.

(4) إيجاد معادلة المماس على منحنى ومعادلة الخط العمودي على المنحنى في نقطة.

ثانيًا: بالنسبة إلى وحدة المشتقات:

(1) تعرف مشتقة الدالة وترميزها.

(2) تعرف العلاقة بين الرسم البياني للدالة f ومشتقتها f'.

(3) تعرف العمليات على الاشتقاق.

(4) استخدام الاشتقاق في الحياة اليومية.

(5) تطبيق المشتقات على الرسومات البيانية.

ثالثًا: بالنسبة إلى وحدة تطبيقات المشتقات/التفاضل:

(1) تعرف القيم القصوى المطلقة.

(2) تطبيق المشتقات على الدوال المتزايدة والمتناقصة.

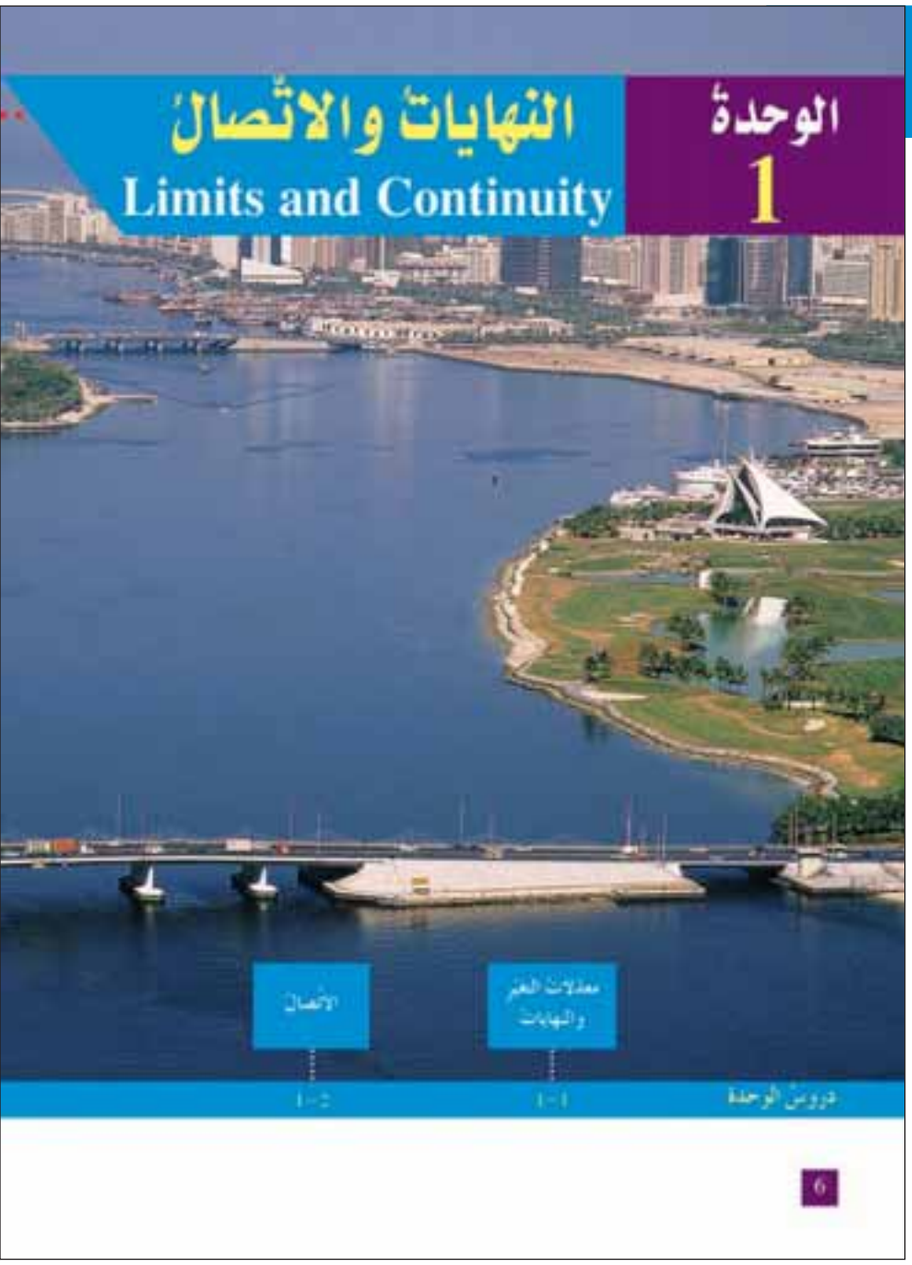
(3) استخدام المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' في الرسم البياني f.

(4) تطبيق المشتقات على مسائل الاقتصاد والصناعة.

(5) تعرّف معادلات المعدلات المرتبطة.

اقتراحات لتدريس الوحدات الثلاث
وحلول التمارين

الوحدة 1 النهايات والاتصال



لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسِّمَت هذه الوحدة إلى 3 دروس على النحو الآتي:

1–1 معدلات التغير والنهايات (ص 16–8)

المصطلحات الأساسية: السرعة المتوسطة، السرعة اللحظية، نهاية الدالة، نظرية الإحاطة (الشطيرة).

1–2 الاتصال (ص 21–17)

المصطلحات الأساسية: الاتصال، نقطة انفصال، انفصال نهائي، انفصال تذبذبي، دالة متصلة.

1–3 معدلات التغير وخطوط المماس (ص 27–22)

المصطلحات الأساسية: متوسط التغير، المماس للمنحنى، معدل التغير.

ماذا سيتعلم الطلاب؟ ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة معدلات التغير والنهايات وخصائصها، ومن ثم يتفهمون نقاط الاتصال والانفصال والدالات المتصلة وتطبيقاتها الحياتية.
وسيعمقون معارفهم بتفهم معنى ميل المنحنى وميل المماس عند نقطة على منحنى والخط العمودي على منحنى.

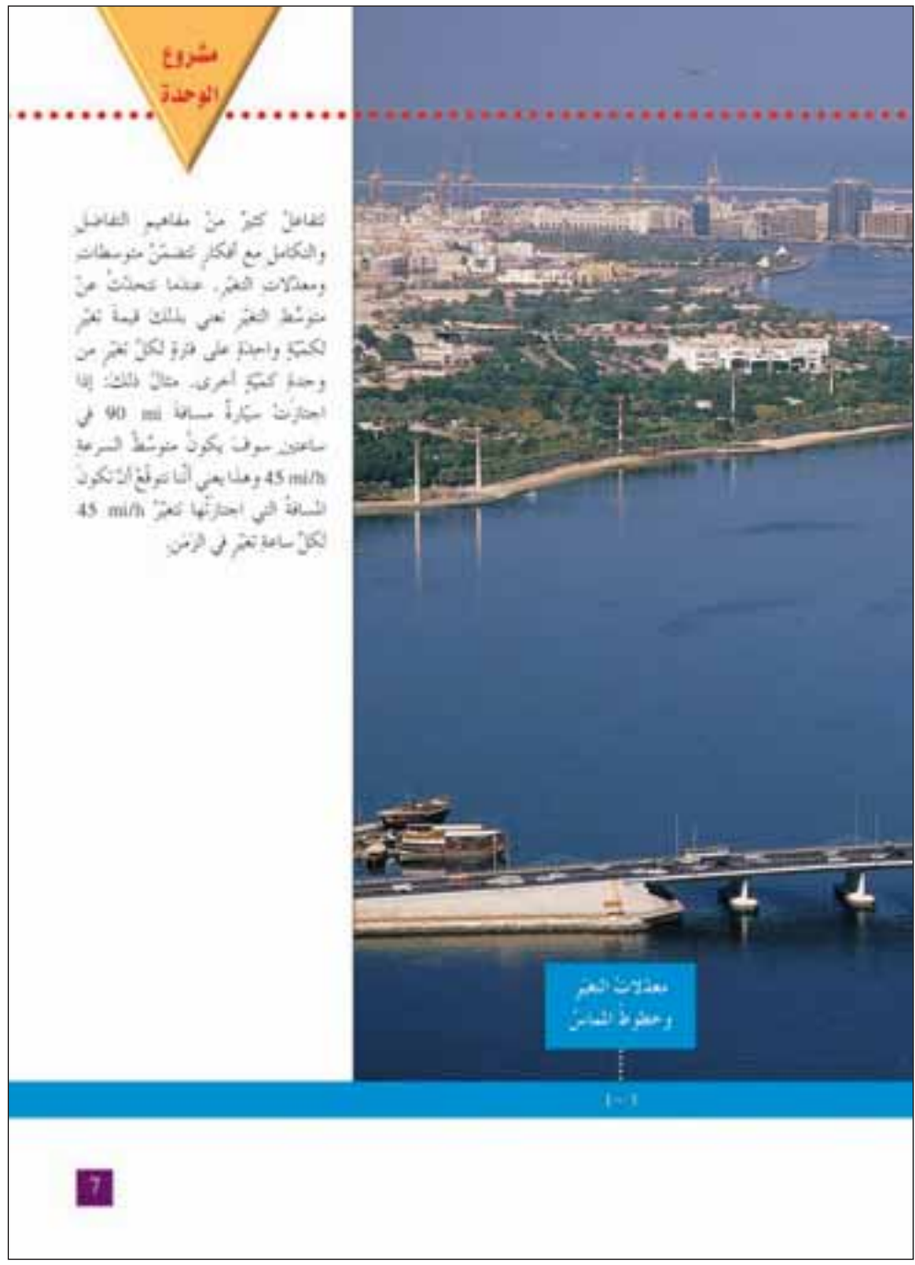
مشروع الوحدة

عرض المشروع:

اسأل الطلاب إذا كانوا يشاهدون النشرة الجوية على التلفاز أو إذا كانوا يتابعون تغير الحرارة من وقت لآخر على ميزان الحرارة في السيارة أو في البيت. ناقش معهم تغير درجات الحرارة في الصف طيلة يوم دراسي بواسطة ميزان حرارة يوضع في الغرفة.

سلم التقييم:

4 – الحسابات صحيحة بكاملها. الرسم البياني واضح ويبرز النتائج. التوقعات معقولة. التقرير مفصل ودقيق. مقياس الرسم واضح ويمثل البيانات بشكل كامل.
3 – معظم الحسابات صحيحة مع أخطاء قليلة. الرسم البياني واضح مع بعض الأخطاء. التوقعات معقولة بأغلبيتها. التقرير مفصل. مقياس الرسم واضح ويمثل البيانات إلى حدّ كبير.
2 – يوجد أخطاء متعدّدة في الحسابات. الرسم البياني غير واضح وفيه أخطاء متنوّعة. التقرير غير مفصّل وفيه نواقص. مقياس الرسم غير منطقي.
1 – معظم عناصر المشروع غير كاملة أو ناقصة.



إجابات مشروع الوحدة:

(1) أوجد بالحساب

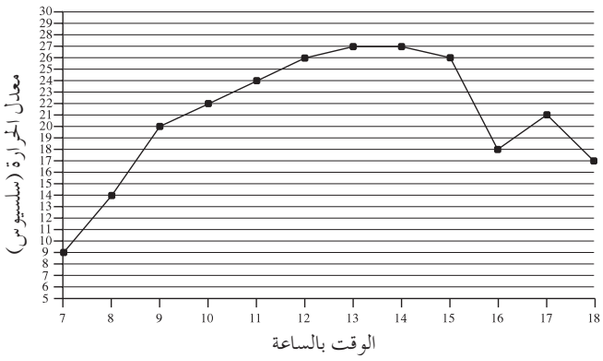
(أ) متوسط التغيير: $315 \div 3 = 105$ AED

(ب) 2.19 درهمًا

(جـ) $2\% = 0.02$

(2) أوجد بالتحليل والرسم البياني

(أ)



(ب) تتنوّع الإجابات: مثال على الفترة [9, 13] يكون متوسط التغير هو: $\frac{27-19}{13-9} = \frac{8}{4} = 2$ أي أن متوسط التغير هو $2°$ لكل ساعة ما بين التاسعة صباحًا والواحدة بعد الظهر.

(جـ) انظر الرسم البياني

ميل القطعة الأولى: $\frac{14-9}{8-7} = 5$

ميل القطعة الثانية: $\frac{19-14}{9-8} = 5$

ميل القطعة الثالثة: $\frac{22-19}{10-9} = 3$

وهكذا... نلاحظ أن ميل كل قطعة يختلف عن الأخرى.

(د) تتنوّع الإجابات: يمكن أن نأخذ نقطة على المماس مثل: $(10.5, 23°)$.

فيكون ميل خط المماس هو حوالي: $\frac{23-22}{10.5-10} = \frac{1}{0.5} = 2$

وبالتالي متوسط التغير ما بين الساعة 10 A.M والساعة 10:30 A.M هو حوالي درجتين.

1–1 معدلات التغير والنهايات

1– الأهداف:

– يحسب الطالب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
– يتعرف ويحسب نهايات الدوال ويطبق خصائص النهايات.
– يستخدم نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات غير المباشرة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

سرعة متوسطة وسرعة لحظية، نهاية الدالة، نهاية معرّفة، لانهاية، نهاية من جهة ونهاية من جهتين، نظرية الإحاطة (الشطيرة).

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية.

4– التمهيد:

(أ) تنطلق سيارة على الطريق السريع بمعدل سرعة 120km/h.
ما المسافة التي تقطعها في غضون 3 ساعات؟ 360km
(ب) إذا قطعت مسافة 600km فما الوقت الذي استغرقته؟ 5 ساعات

– اسأل الطلاب

(أ) ما التغير في المتغير x؟ $\Delta x = x_2 - x_1$ ؛ $(x_1 \neq x_2)$
(ب) ما التغير في الدالة؟ $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$
(ج) ما متوسط التغير للدالة؟ $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

5– التدريس:

يمكن أن تكون الدالة $y = \frac{\sin x}{x}$ مقدمة متميزة لفكرة النهايات. باستخدام الحاسوب، يمكن أن يرى الطلاب أن هذه الدالة تقترب من 1 كلما اقتربت x من الصفر.

تمتلك الدالة $f(x) = [x] + [4 - x]$ خواص مهمة يمكن أن تقود إلى مناقشة ذات معنى للنهايات.

أحد أهداف المقرر أن يتعامل الطلاب مع التقنيات في استكشاف النتائج والتأكد منها وتفسيرها، وفي حل المسائل. لأدوات الرسم البياني أهمية كبيرة في دراسة الدوال ولكن لا يمكن أن تستخدم في براهين النظريات والتصميمات. أكّد أهمية الحلول بطرق جبرية.

ملاحظات على الأمثلة

■ في مثال (2) أكّد أن السرعة اللحظية هي نهاية. من المهم أن يفهم الطلاب العمليات الحسابية في هذا المثال، لأن عمليات حسابية مشابهة سوف تكون ضمن حساب المشتقات. يوفر هذا المثال صلة مع مناقشة معدلات التغير في الدرس (3–1).

■ يوفر مثال (3) تدريبًا مهمًّا في تطبيق خواص النهايات.

■ في مثال (5)، يمكن استخدام قدرة الحاسوب في رسم المنحنى وهذا يساعد الطلاب على تنمية فهم حدسي (بدهي) للنهاية.

■ يقدم مثال (7) أمثلة للنهايات أحادية وثنائية الجانب.

6- الربط:

لا يوجد.

7- أخطاء شائعة:

عند رسم منحنيات بعض الدوال النسبية ومتفرعة القاعدة، قد يُظهر الحاسوب أن بعض هذه المنحنيات متصلة، في حين أنها غير متصلة عند بعض النقاط من مثل الدالة $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ فهي غير متصلة عند أصفار المقام.

أكّد ضرورة تحديد أصفار المقام قبل الرسم.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين:

A-2، A-5، A-8، A-13، A-18، A-20.

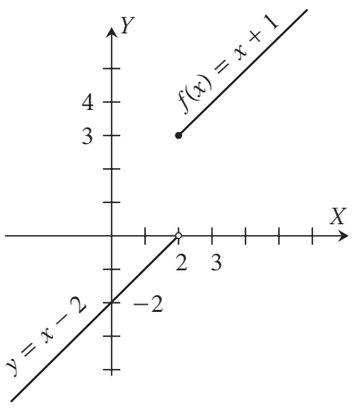
تحقق من عملهم. تأكد من فهمهم لمعدلات التغير والفرق بين السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.

9- مسألة اليوم:

ترك سائق سيارة منزله عند الساعة التاسعة صباحًا متوجهًا إلى المدينة التي تبعد مسافة 168 Km عن المنزل. حسب أنه إذا بقي سائرًا بالسرعة نفسها فسيصل متأخرًا ربع ساعة أما إذا زاد سرعة سيارته بمعدل 8 Km/h فسيصل قبل ربع ساعة. أوجد سرعته الحالية. 48 Km/h

10- إجابات وحلول:

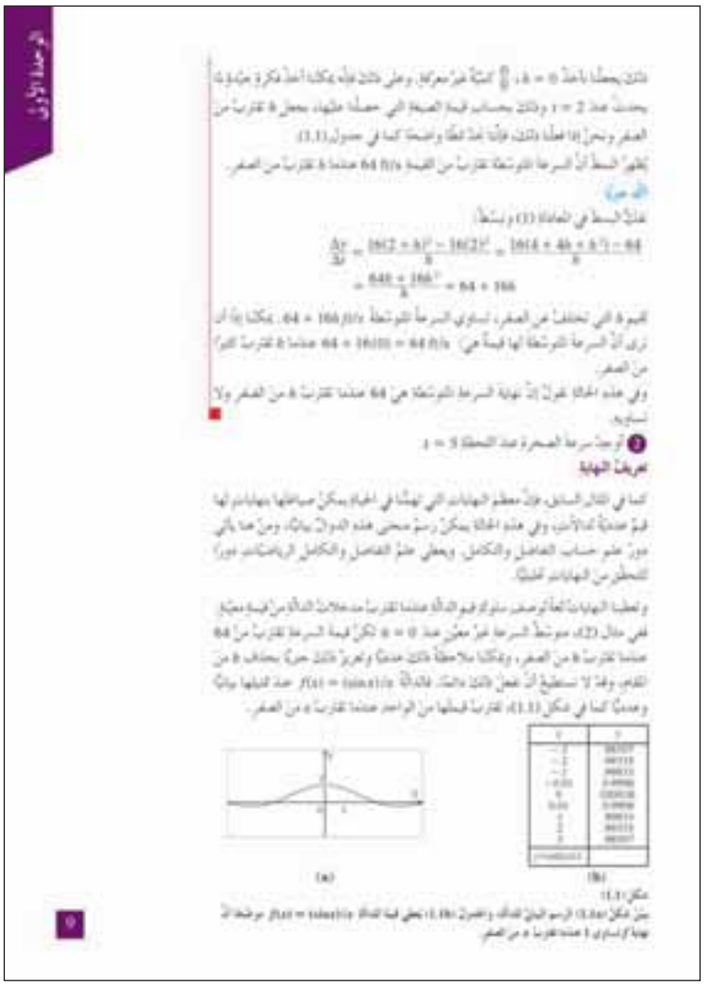
إجابات التمارين في سياق الدرس 1-1



(1) 128 ft/s

(2) 160 ft/s

(3) 0, 3



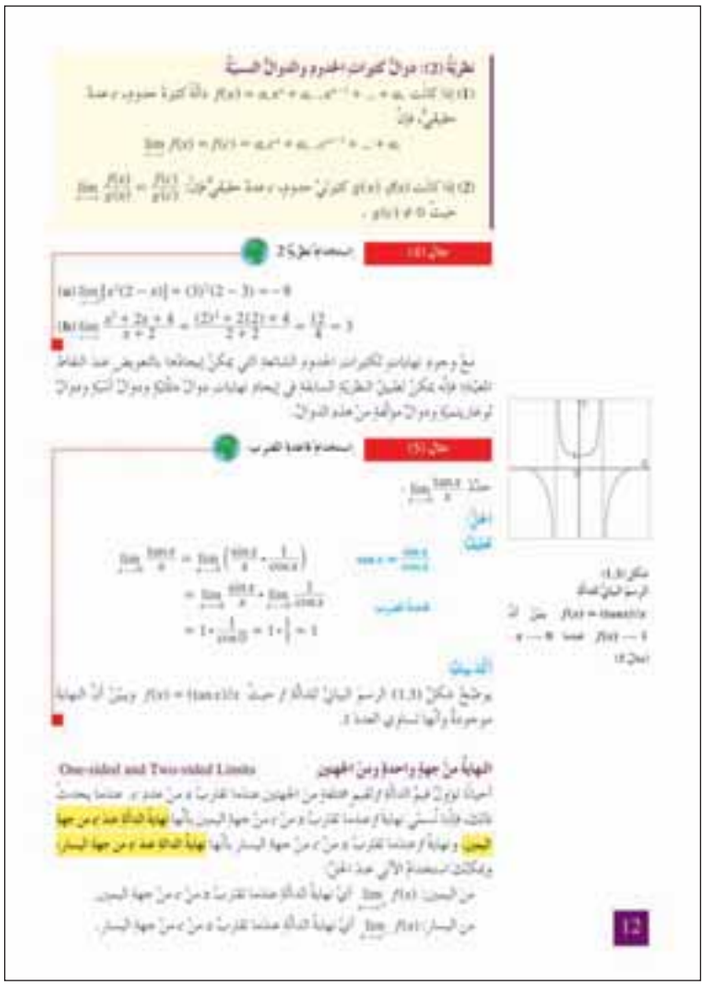
(4) (أ) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}, x \geq 1$ و $f(x) = \dfrac{1-x}{x}, x < 1$

(ب) 0، 0

(جـ) نعم لأن النهايتين متساويتان.

(5) $0 \leq \left| x^2 \cos\dfrac{1}{x^2} \right| \leq |x^2| = x^2$;

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x^2} = 0$$



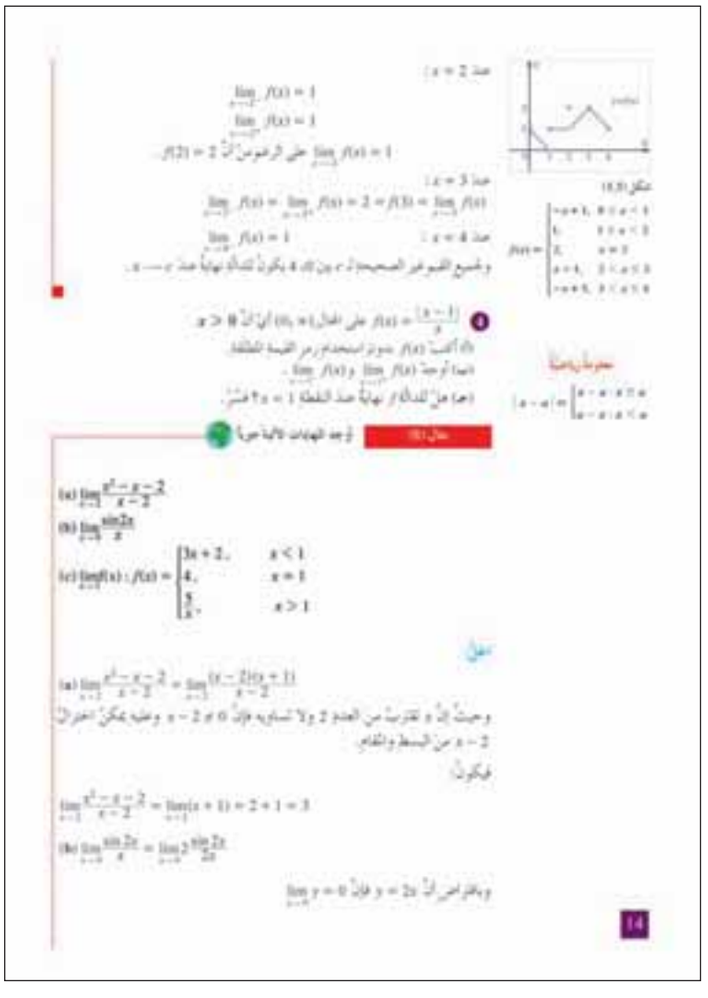
نظرية (2): نهايات مجموع وحاصل ضرب ودارج الدالتين

حل (4)

حل (5)

النهايات من جهة واحدة ومن الجهتين

One-sided and Two-sided Limits



حل (6)

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 2-1

(1) 2

(2) **(a)** -2

(b) -1

(c) لا نهاية

(d) -1

(3) **(a)** 1

(b) 2

(c) لا نهاية

(d) 2

(4) $(2x-1)(x+5)=0$

$x=\frac{1}{2}\,;\,x=-5$

(5) $-x^2+6x-8=4$

$-x^2+6x-12=0$

$\Delta=36-4\times12=36-48<0$

لا توجد حلول حقيقية

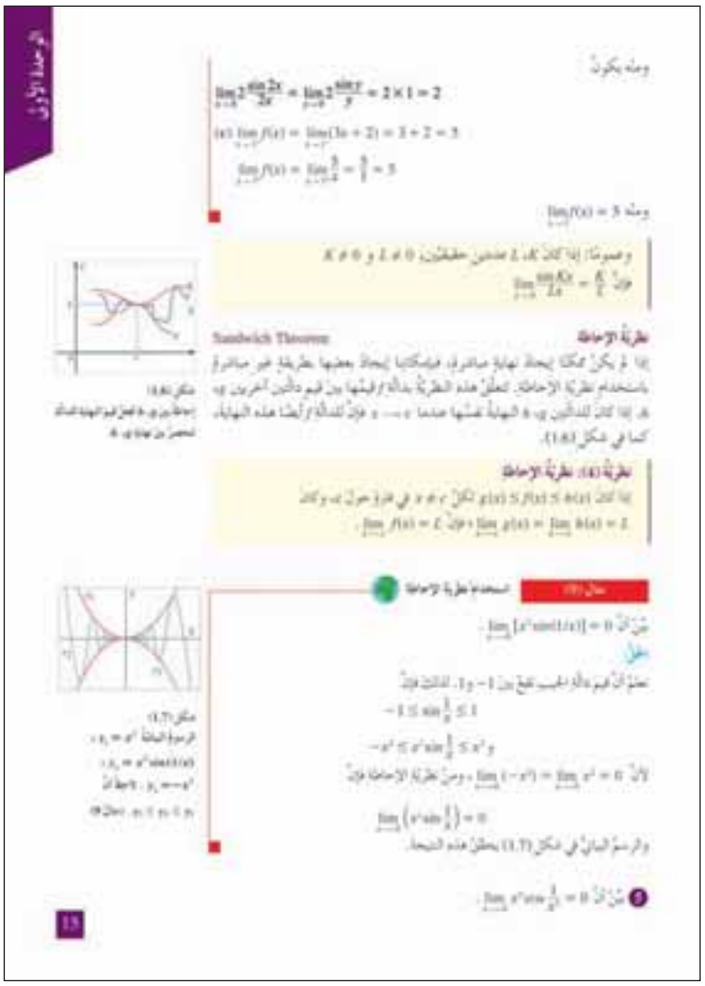
(6) $-x^2+6x-8=c$

$x^2-6x+8+c=0$

$\Delta=36-4(8+c)<0$

$9<8+c$ لا توجد حلول

$1-c<0$ إذا كانت $c>1$ إذًا



تمارين تمهيدية للدرس 2-1

1. أوجد $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$.

2. إذا كان $f(x)=[x]$، أوجد كلّ نهاية:
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1.5} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(d)** $f(-1)$

3. إذا كان $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5, & x<2 \\ 4-x, & x\geq 2 \end{cases}$، أوجد كلّ نهاية:
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 3} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 4} f(x)$ **(d)** $f(2)$

4. إستخدم التحليل لحلّ $2x^2+9x-5=0$.

* في التمرينين 5، 6، إذا كان $f(x)=\begin{cases} 5-x, & x\leq 3 \\ -x^2+6x-8, & x>3 \end{cases}$

5. حلّ المعادلة $f(x)=4$.

6. أوجد قيمة c بحيث إنّ المعادلة $f(x)=c$ ليس لها حلّ.

مشروع الوحدة: أوجد بالحساب والتحليل والرسم البيانيّ

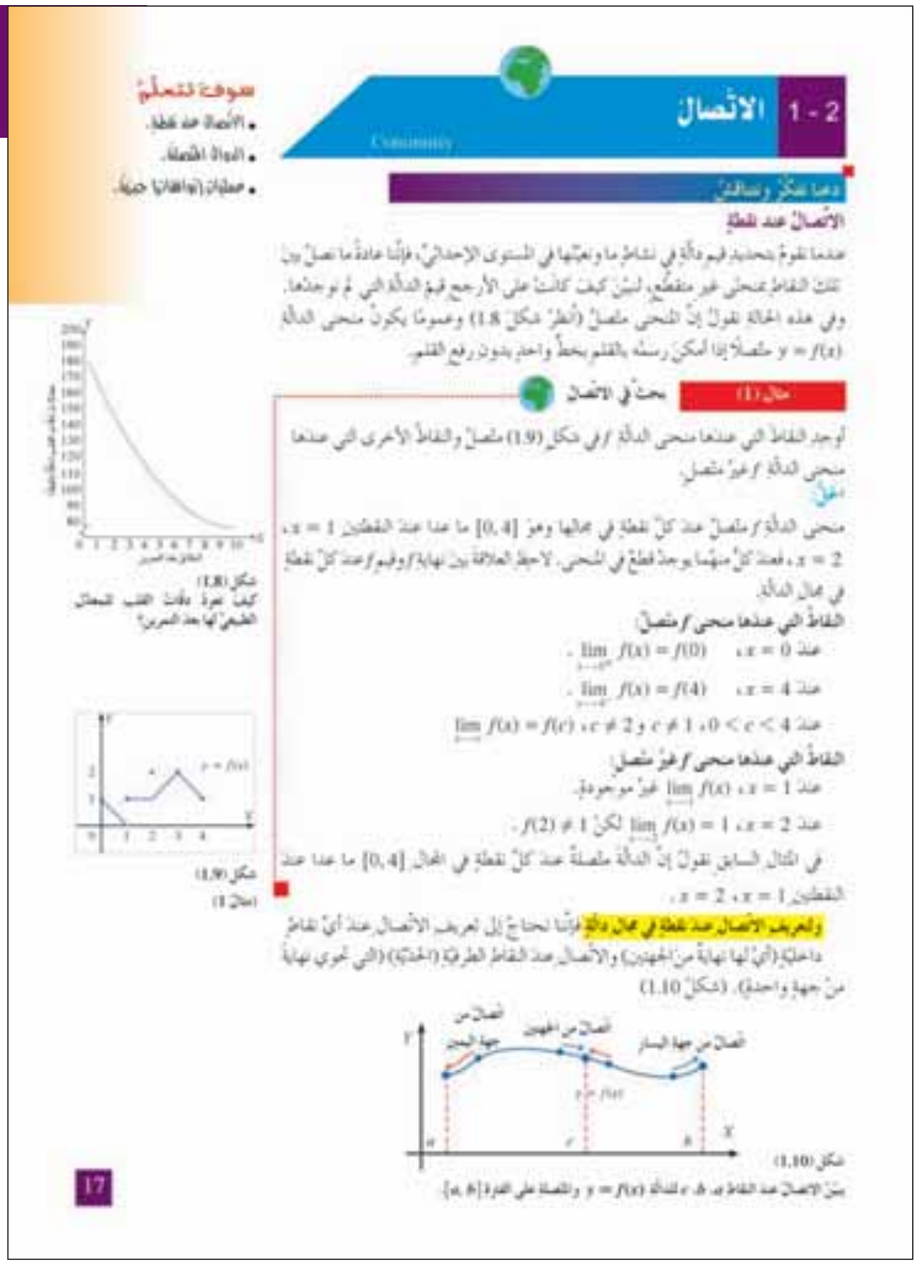
1. عبّر عمّا يلي كمتوسّط لمعدّل التغيّر.
(أ) إزداد سعر بطاقة السفر بالطائرة من بيروت إلى دبي 315 AED خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة.
(ب) إنخفض سعر السهم لإحدى الشركات في 5 أيّام متتالية 10.95 AED
(ج) إزدادت ميزانيّة أحد المصارف في السنوات الأربع الأخيرة 8%
(د) يتوقّع طارق خسارة 9 kg من وزنه في 6 أسابيع نتيجة لممارسة التمارين الرياضيّة واتّباع حميةٍ غذائيّة.

2. لنفترض أنّ الجدول يمثّل قيم درجات الحرارة ليوم واحد من شهر ديسمبر في مدينة العين.

الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (°C)
7AM	9°C
8AM	14°C
9AM	19°C
10AM	22°C
11AM	24°C
12PM	26°C
13PM	27°C
14PM	27°C
15PM	26°C
16PM	18°C
17PM	21°C
18PM	17°C

(أ) مثّل البيانات على المحاور مستخدمًا مقياسًا على المحور الأفقيّ من 7 إلى 18 ومقياسًا على المحور الرأسيّ من 5 إلى 35 [يمكن أن تمثّل نقطة الأصل بالزوج المرتب (7, 5)] إستخدم النقاط لترسم منحنى درجات الحرارة كدالّة بالنسبة إلى الوقت في هذه الفترة.
(ب) أطلب إلى كلّ طالب من مجموعتك إيجاد متوسّط التغيّر لدرجة الحرارة على فترات مختلفة من الوقت (مثلاً يجد أحدهم متوسّط التغيّر على الفترة من 9 AM إلى 13 PM).
(ج) أرسم القطع المستقيمة بين النقاط المتتاليّة ثمّ أوجد ميل كلّ قطعة. ماذا تلاحظ؟
(د) يبيّن ميل كلّ قطعة مستقيمة على الرسم البيانيّ متوسّط تغيّر الحرارة في كلّ فترة، وميل المماس في كلّ نقطة على الرسم البيانيّ هو أيضًا تغيّر الحرارة في هذه اللحظة ونحصل على "معدّل التغيّر اللحظيّ".
أطلب إلى كلّ طالب رسم مماسٍ عند النقطة **(10AM, 22°C)** على الرسم البيانيّ. إختر نقطة على هذا المماس ثمّ قدّر إحداثيّاتها واستخدمها لإيجاد ميل خطّ المماس. كيف يمكن لهذا المؤشّر أن يبيّن سرعة تغيّر الحرارة عند الساعة 10 AM؟

1–2 الاتصال


1 - 2 الاتصال

سوف نتعلم

- الاتصال عند نقطة.
- الدالة المتصلة.
- عمليات (توافقها جبريا).

دعا مكرر وسابقا

الاتصال عند نقطة

عندما نقوم بتحديد قيم دالة في نشاط ما وتمثيلها في المستوى الإحداثي، فإننا عادة ما نصل بين النقاط بمنحنى غير منقطع، لنرى كيف كانت على الأرجح قيم الدالة التي لم نوجدها. وفي هذه الحالة نقول إنّ المنحنى متصل (أنظر شكل 1.8) وعمومًا يكون منحنى الدالة $y = f(x)$ متصلاً إذا أمكن رسمه بالقلم بخط واحد بدون رفع القلم.

مثال (1) بحث في الاتصال

أوجد النقاط التي عندها منحنى الدالة f في شكل (1.9) متصل والنقاط الأخرى التي عندها منحنى الدالة f غير متصل.

الحل

منحنى الدالة f متصل عند كلّ نقطة في مجالها وهو $[0, 4]$ ما عدا عند النقطتين $x = 1$، $x = 2$، فعند كلٍّ منهما يوجد قطع في المنحنى. لاحظ العلاقة بين نهاية f وقيم f عند كلّ نقطة في مجال الدالة.

النقاط التي عندها منحنى f متصل:

عند $x = 0$، $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

عند $x = 4$، $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$.

عند $0 < c < 4$، $c \neq 1$ و $c \neq 2$، $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

النقاط التي عندها منحنى f غير متصل:

عند $x = 1$، $\lim_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة.

عند $x = 2$، $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ لكن $1 \neq f(2)$.

في المثال السابق نقول إنّ الدالة متصلة عند كلّ نقطة في المجال $[0, 4]$ ما عدا عند النقطتين $x = 1$، $x = 2$.

والتعريف الاتصال عند نقطة في مجال دالة فإننا نحتاج إلى تعريف الاتصال عند أي نقطة داخلية (أي لها نهاية من الجهتين) والاتصال عند النقاط الطرفية (الحدية) (التي لجوي نهاية من جهة واحدة). (شكل 1.10)

شكل (1.8) كيف تعرف دقات القلب للمحلل الطبي إذا حدد المرض؟

شكل (1.9) (مثال 1)

شكل (1.10) بين الاتصال عند النقاط a، b، c للدالة $f(x) = y$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

17

1– الأهداف:

– يتمكن الطالب من تحديد الفترات حيث تكون الدالة متصلة، ويفهم معنى دالة متصلة.

– يتمكن الطالب من إلغاء نقاط الانفصال للدالة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

الاتصال عند نقطة، الدوال المتصلة، نماذج سلوك النهاية.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

اطلب إلى الطلاب رسم الدّالة $f(x) = 2x - 3$ ثم اطلب إليهم رسم الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = -x + 3\,; x \leq 2$

$f(x) = x + 1\,; x > 2$

اسألهم هل مستقيم الدالة الأولى متصل؟ نعم

هل المنحنى في الدالة الثانية متصل؟ لا

5– التدريس:

يمكن أن تبدأ الدرس باستخدام قلم رصاص لتتبع الرسم البياني لدالة متصلة على أي فترة بدون رفع القلم عن الورقة.

ينبغي أن يكون تعريف الاتصال مفهومًا لدى الطلاب إذا أرادوا النجاح في هذا المقرر. كن واعيًا وبعناية لتميز بين الاتصال عند نقطة داخل المجال (الذي يتضمن نهاية ثنائية الجانب) والاتصال عند إحدى نقطتي نهايتي المجال (والذي يتضمن نهاية وحيدة الجانب).

تجري مناقشة أنواع مختلفة من عدم الاتصال في هذا الدرس. سوف يكون من المفيد توضيح كل نوع من عدم الاتصال باستخدام آلة علمية أو بشكل تقريبي على السبورة. ينبغي أن تستخدم مسميات الأنواع المختلفة من عدم الاتصال خلال هذا المقرر.

ملاحظات على الأمثلة

- يوفر مثال (1) مقدمة بصرية للدوال المتصلة. من المهم للطلاب أن يفهموا السبب في أن الدالة غير متصلة عند $x = 2$.
- يوضح مثال (3) فكرة أن الدالة المتصلة عند جميع نقاط مجالها، يمكن أن تتضمن نقطة عدم اتصال (لا تنتمي للمجال) ولكن الدالة معرفة على جانبيها.

6– الربط:

اطلب إلى الطلاب إحضار رسم بياني لتخطيط قلب معافى وناقش معهم كيفية اتصال جميع النقاط، وأيضًا رسم بياني لتخطيط قلب مريض وناقش معهم نقاط عدم الاتصال. أو اطلب إليهم مشاهدة تخطيط قلب مأخوذ في غرف العمليات.

7– أخطاء شائعة:

قد يجد بعض الطلاب صعوبة في أن يعرفوا الفرق بين الاتصال عند نقطة داخل المجال والاتصال عند نقطة طرفية.

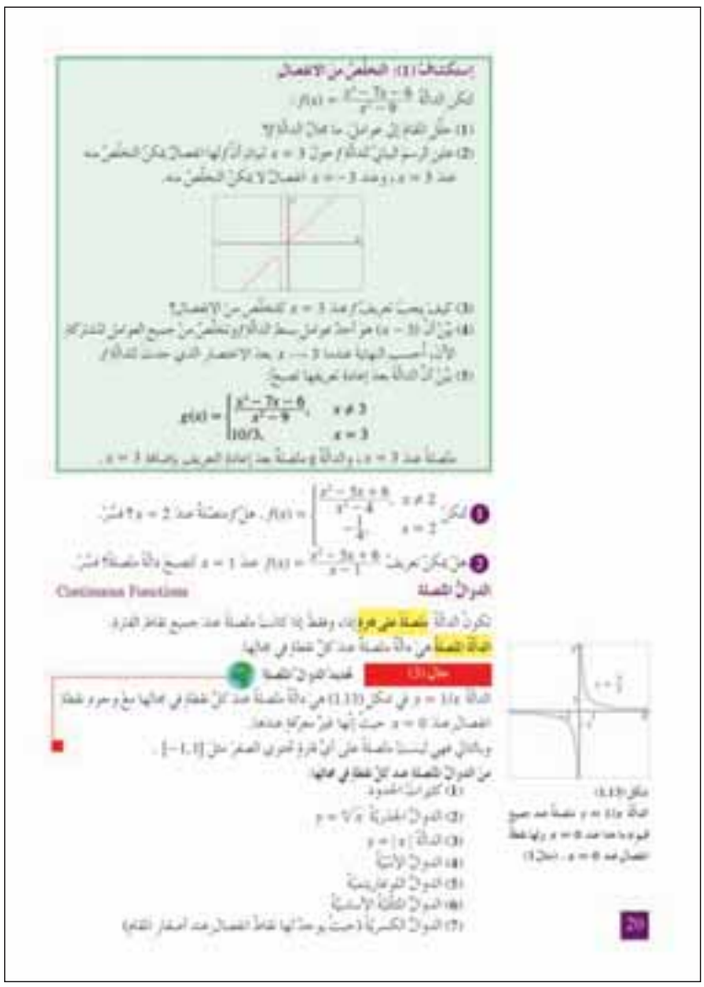
8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: A–1، A–4، A–7، A–9. تحقق من عمل الطلاب. تأكد من أنهم قد تفهموا معنى الاتصال على منحنى الدّالة وأيضًا معنى نقاط الانفصال.

9– مسألة اليوم:

يتغير عدد أيام العمل اللازمة لإصلاح جزء من رصيف المدينة عكسيًّا بحسب عدد العمال الذين يقومون بهذا العمل. إذا كان يلزم عاملان لإصلاح جزء معين من الرصيف خلال 12 يومًا، فما عدد العمال اللازم لإتمام المهمة خلال 4 أيام ؟

(6 عمّال؛ $y = \frac{k}{x}$)



10- إجابات حلول:

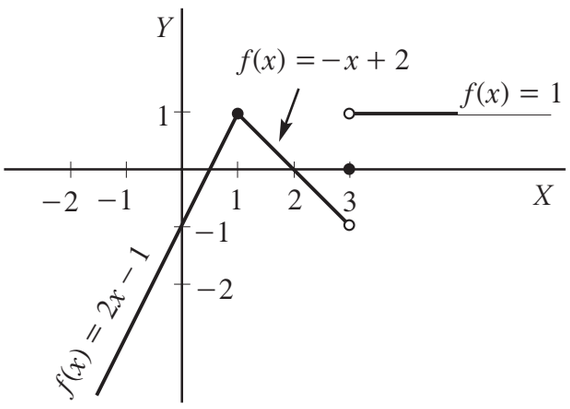
إجابات التمارين في سياق الدرس 2-1

(1) نعم؛

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=-\frac{1}{4}=f(2)$$

(2) لا، لها انفصال نهائي.

(3) (أ)



(ب) ليست متصلة عند $x=3$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 3-1

(1) $\Delta x=8, \Delta y=3$

(2) $\Delta x=a-1, \Delta y=b-3$

(3) الميل يساوي $-\frac{4}{7}$

(4) الميل يساوي $\frac{2}{3}$

(5) $y=\frac{3}{2}x+6$

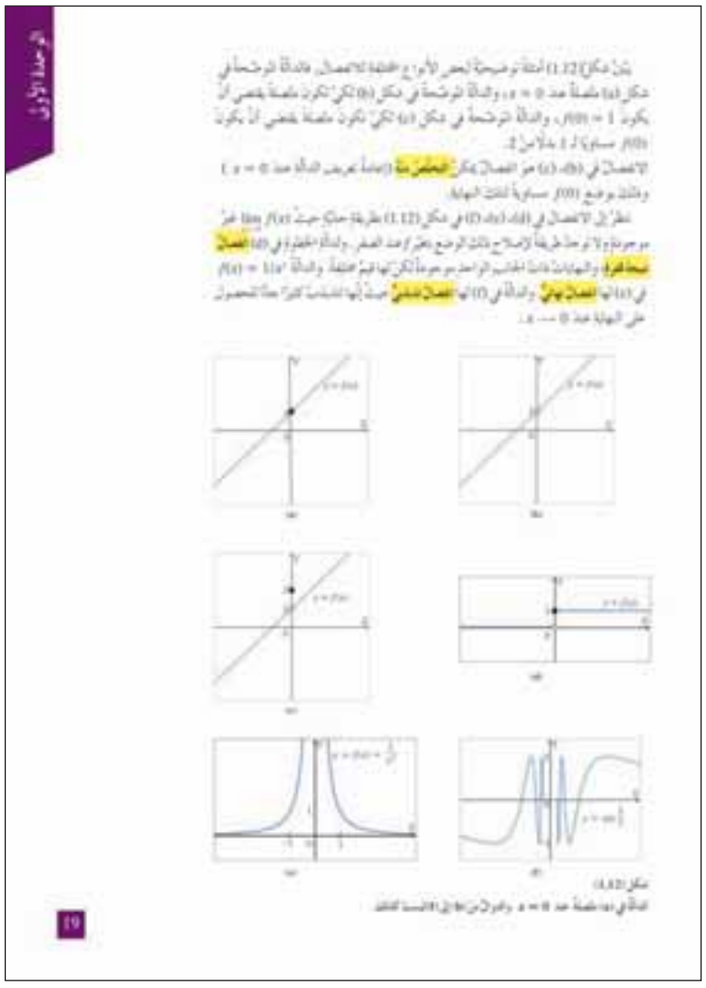
(6) $y=-\frac{7}{3}x+\frac{25}{3}$

(7) $y=-\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$

(8) $y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$

(9) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$

(10) $b=\frac{19}{3}$



1–3 معدلات التغير وخطوط المماس

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على تطبيق تعريف ميل المنحنى بهدف إيجاد الميول.

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة.

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد معدل التغير للدالة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

متوسط التغير، معدل التغير، مماس للمنحنى، ميل منحنى، خط عمودي على منحنى، السرعة اللحظية.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب، منقلة.

4– التمهيد:

اطلب إلى الطلاب رسم الخطوط المستقيمة $f(x) = x + 2$ و $f(x) = -x + 3$ ثم اسألهم عن قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور السيني، ثم اطلب إليهم إيجاد ظل كل زاوية (tan) ومقارنة ظل كل زاوية مع معامل x .

5– التدريس:

إحدى الطرائق لتقديم هذا الدرس هي استرجاع نتائج المثالين (1 و2) في الدرس (1–1). ينبغي أن يكون معظم الطلاب مدركين لفكرة «الميل»، لذلك فإنه ينبغي تشجيعهم لفحص الرسوم البيانية لدوال كي يتأكدوا من معقولية إجاباتهم.

يوفر متوسط التغير والمقدمة في هذا الدرس تطبيقًا مرتبطًا بالنهايات أو الدوال النسبية. وهو أيضًا مرتبط بالمشتقات، على الرغم من أننا لا نستخدم كلمة «مشتقة» في هذا الدرس.

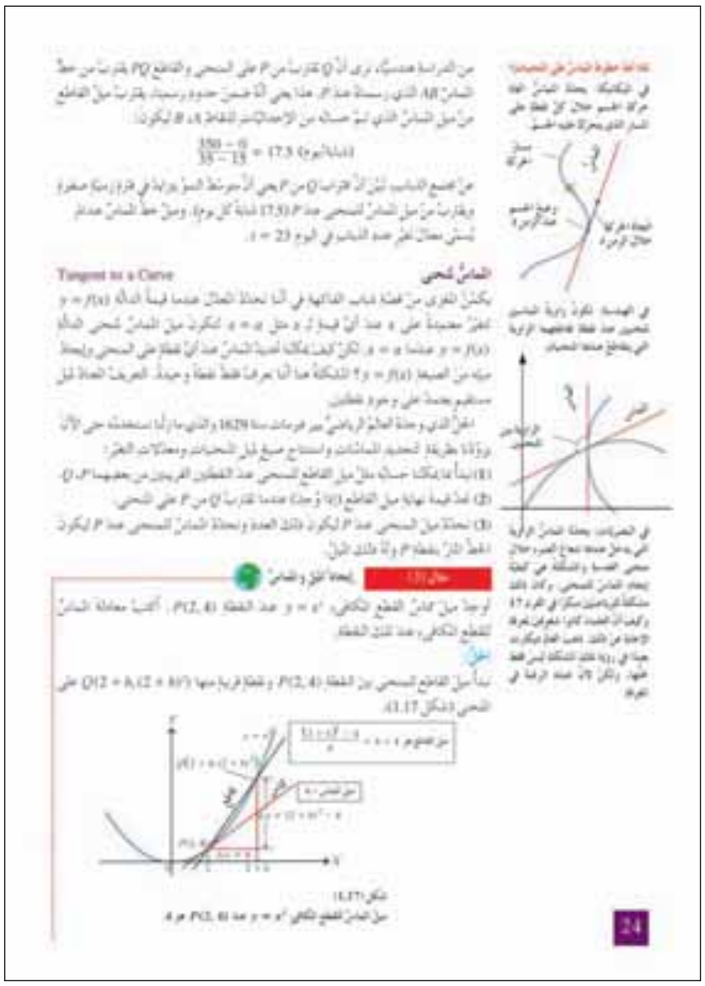
يمكن أن تلخص الدرس بأن تبين كيف توجد خطوط المماس والخطوط العمودية على منحنى $y = x^2 + x$ عند النقطة $(-3, 6)$.

ملاحظات على الأمثلة

■ يقدم مثال (1) مفهوم متوسط التغير. قد ترغب في أن تبرز أن السرعة المتوسطة المحسوبة في الدرس (1–1) هي أمثلة لمتوسطات تغير.

■ يوضح مثال (2) أن متوسط التغير يمكن تقديره تقريبيًّا من الرسوم البيانية، حتى ولو كانت قاعدة الدالة غير معلومة.

■ في مثال (3)، لاحظ أن «Q» نقطة يمكن أن تتحرك على المنحنى، وذلك على عكس نقطة ثابتة على المنحنى. فكرة: (ميل القاطع) $\lim_{Q \to P}$ فكرة معقولة في هذا السياق.



6– الربط:

معادلة السقوط الحر لأي جسم على المريخ هي $s = 1.86\,t^2$ حيث s تقاس بالمتر و t بالثواني. لنفترض أن صخرة سقطت من ارتفاع 200m على أرض المريخ. أوجد سرعة الصخرة عند $t = 1\,\text{sec}$.

$$V(t) = \lim_{h\to 0}\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1.86(1+h)^2 - 1.86(1)^2}{h} = 3.72$$

فتكون سرعة الصخرة: 3.72 m/ sec

7– أخطاء شائعة:

كثير من الطلاب معرّضون للوقوع في أخطاء عند حساب ميل المنحنى أو عند إيجاد ميل المماس على منحنى. أكّد لهم أن استخدام قاعدة الميل هي لنقطة موجودة على المنحنى وليس لأي نقطة غير موجودة على المنحنى.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: A–2، A–5، A–7، A–9. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا جيدًا معنى معدلات التغير وميل المنحنى والتطبيق على السرعة في أوقات محددة.

9– مسألة اليوم:

انطلق قطار من مدينة A متجهًا إلى مدينة B وفي الوقت نفسه انطلق قطار آخر من مدينة B متجهًا إلى مدينة A. يبلغ معدل سرعة أحد القطارين $\frac{3}{2}$ من معدل سرعة الآخر وتبلغ المسافة بين المدينتين 540 km . إذا التقيا بعد ساعتين فكم يكون معدل سرعة كل قطار؟ وما المسافة التي قطعها كل قطار؟

108 km ; 162 km

216 km ; 324 km

10– إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3–1

(1) $\dfrac{f(5)-f(0)}{5-0} = \dfrac{2(e-1)}{5}$

(2) الميل: -5

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{5}{h-1};$$

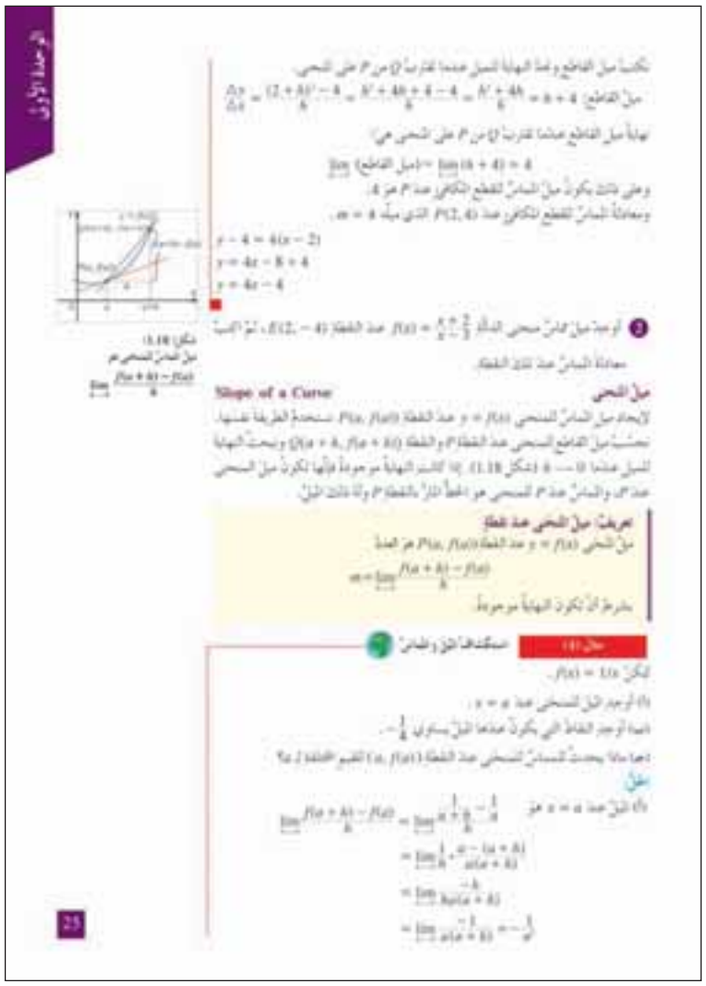
$$\lim_{h\to 0}\frac{5}{h-1} = -5$$

معادلة المماس: $y+4 = -5(x-2)$;

$$y = -5x+6$$

(3) (أ) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

(ب) $\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$



(جـ) يقترب الميل من الصفر ويصبح المماس قريبًا من الوضع الأفقي.

(4) $y = -4x + 18$

(5) 128 ft/s

اختبار الوحدة

إجابات اختبار الوحدة الأولى

(1) (a) 2

(b) -1

(c) لا يوجد

(d) -1

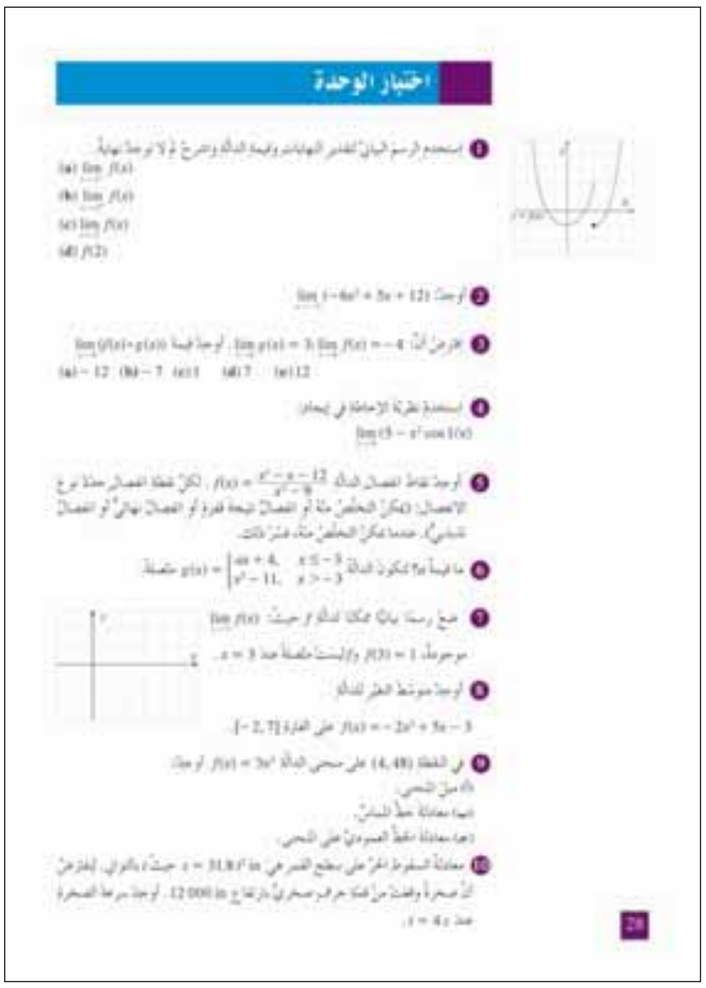
(2) -57

(3) (a)

(4) $\lim_{x\to 0}(5 - x^2) = \lim_{x\to 0}(5 + x^2) = 5;$

$5 - x^2 \le 5 - x^2\cos\frac{1}{x} \le 5 + x^2$

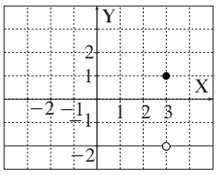
إذن $\lim_{x\to 0}\left(5 - x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 5$



(5) انفصال يمكن التخلص منه عند $x = -3$ وانفصال نهائي عند $x = 3$.

(6) $a = 2$

(7)



(8) -5

(9) (أ) 24

(ب) $y = 24x - 48$

(جـ) $y = -\frac{1}{24}x + 48\frac{1}{6}$

(10) 254.4 in/s

نظريّة (1): خواصُّ النهايات

إذا كانت L، M، c، k أعدادًا حقيقيّة، $\lim_{x\to c} f(x) = L$، $\lim_{x\to c} g(x) = M$، فإنّ:

(1) قاعدة المجموع: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$

نهاية مجموع دالّتين هي مجموع نهايتيهما.

(2) قاعدة الفرق: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$

نهاية الفرق بين دالّتين هي الفرق بين نهايتيهما.

(3) قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

نهاية حاصل ضرب دالّتين هي حاصل ضرب نهايتيهما.

(4) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

نهاية ثابت مضروب في دالّة هي حاصل ضرب الثابت في نهاية الدالّة.

(5) قاعدة ناتج القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},\ M\neq 0$

نهاية ناتج قسمة دالّتين هي ناتج قسمة نهايتيهما بشرط ألّا تساوي نهاية المقام صفرًا.

(6) قاعدة القوى: إذا كان n، s عددين صحيحين، $s\neq 0$،

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{\frac{n}{s}} = L^{\frac{n}{s}}$$

على شرط أنّ $L^{\frac{n}{s}}$ عدد حقيقيّ.

نهاية دالّة جهة اليسار $\lim_{x\to c^-} f(x)$

نهاية دالّة جهة اليمين $\lim_{x\to c^+} f(x)$

نظريّة النهاية من جهة واحدة أو من الجهتين:

الدالّة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا كانت وفقط إذا كانت النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالّة عند c موجودتين، وكلتاهما تكونان متساويتين.

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^-} f(x) = L \text{ و } \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

نظريّة الإحاطة:

تتعلّق هذه النظريّة بدالّة f قيمها بين قيم دالّتين أخريين g، h. إذا كانت للدالّتين g، h النهاية نفسها عندما $x \to c$، فإنّ للدالّة f أيضًا هذه النهاية.

تعريف: الاتصال عند نقطة

نقطةٌ داخليّة: تكونُ الدالّة $y = f(x)$ متصلة عند نقطةٍ داخليّةٍ c في مجالها إذا كان

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

نقطةٌ طرفيّة (حديّة): تكونُ الدالّة $y = f(x)$ متصلةً عند نقطةٍ طرفيّةٍ لها نهايةٌ من جهة اليمين a أو نقطةٍ طرفيّةٍ b لها نهايةٌ من جهة اليسار مجالها إذا كان

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

إذا كانت الدالّة f غير متصلةٍ عند نقطة c، فنعبّرُ عن ذلك بأنّ f غيرُ متصلةٍ عند $x = c$، هي نقطةُ انفصالٍ للدالّة f مع ملاحظة أنّ c ليستْ بحاجةٍ إلى أنْ تكونَ في مجال f.

تكونُ الدالّةُ متصلةً على فترةٍ إذا، وفقطْ إذا كانتْ متصلةً عند جميعِ نقاطِ الفترةِ.

خواصُّ الدوالِّ المتصلة

إذا كانتْ f و g دالّتين متصلتين عند $x = c$ فإنّ التوافيقات التالية لدوالّ هي دوالّ متصلةٌ عند $x = c$:

(1) الجمع: $f + g$

(2) الطرحُ: $f - g$

(3) الضربُ: $f \cdot g$

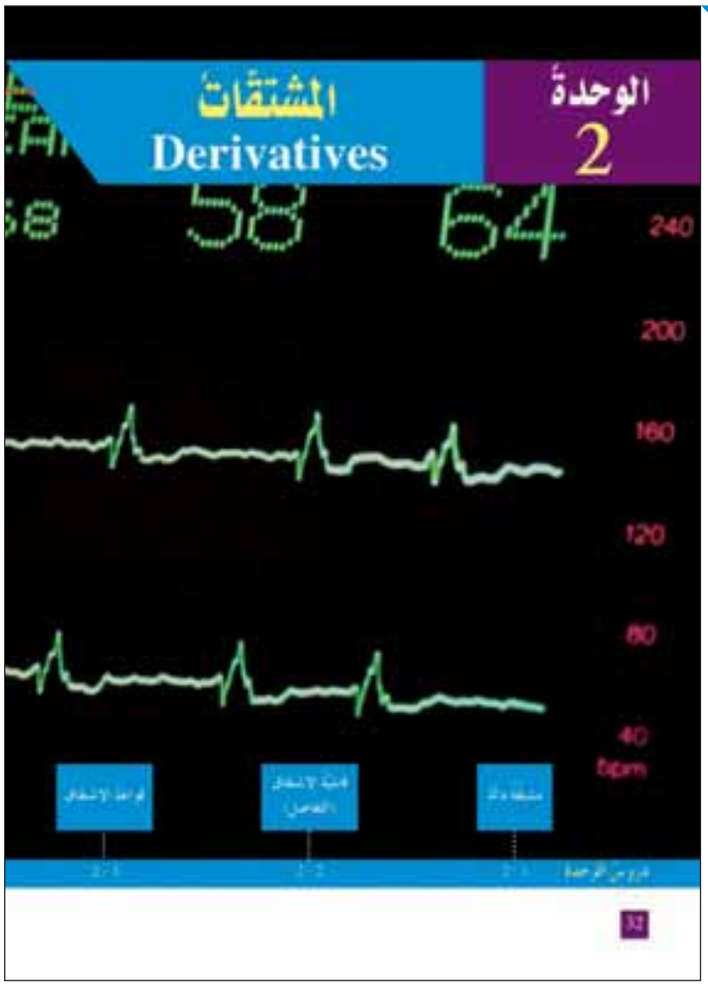
(4) الضربُ في ثابتٍ: $k \cdot f$ حيثُ k أيُّ عددٍ

(5) ناتجُ القسمة: f/g بشرط $g(c) \neq 0$

– متوسّطُ التغيّرِ لدالّةٍ على فترةٍ هو قيمةُ ذلك التغيّرِ مقسومًا على طولِ تلك الفترةِ.

– ميلُ المنحنى للدالّة f في نقطة $x = a$ هو: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا وُجدتْ.

– الخطُّ العموديُّ على منحنى عند نقطةٍ معرّفةٍ هو الخطُّ العموديُّ على المماسِّ للمنحنى عند تلك النقطة.



لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسِّمَت هذه الوحدة إلى 5 دروس على النحو الآتي:

2–1 مشتقة دالة (ص 38–34)

المصطلحات الأساسية: مشتقةالدالة، دالة قابلة للتفاضل، مشتقة من جهة واحدة.

2–2 قابلية الاشتقاق (التفاضل) (ص 41–39)

المصطلحات الأساسية: قابليةالاشتقاق.

2–3 قواعد الاشتقاق (ص 49–42)

المصطلحات الأساسية: مشتقة الدالة الثابتة، قاعدة القوى للأسس، قاعدة الضرب بعدد ثابت، مشتقات ذات رتب عليا، قاعدة الجمع والطرح، قاعدة الضرب.

2–4 مشتقات الدوال المثلثية (ص 56–50)

المصطلحات الأساسية: مشتقة دالة الجيب وجيب التمام.

2–5 قاعدة السلسلة (ص 65–57)

المصطلحات الأساسية: مشتقة دالة الدالة، قاعدة السلسلة، الاشتقاق من الخارج إلى الداخل، ميل المنحنيات البارامترية، الاشتقاق الضمني.

ماذا سيتعلم الطلاب؟ ولماذا؟

يتعرف الطلاب في هذه الوحدة مشتقة الدالة من الرتبة الأولى والمشتقات ذات الرتب العليا، كما أنه يتعرف مشتقات الدوال المثلثية وقاعدة السلسلة والمشتقة من جهة واحدة أو من جهتين.

مشروع الوحدة

عرض المشروع:

اسأل الطلاب إذا كانت لديهم معلومات عن الغطس. اشرح لهم أن حجم الهواء في الرئتين يتزايد عندما يصعد الغطاس إلى سطح الماء. إذا صعد الغطاس بسرعة كبيرة فإن الفقاقيع الغازية حول الجسم تحدث تصلبًا في العضلات.

اسأل الطلاب كيف أن الرسم البياني للمسافة تحت الماء يبين حجم الهواء في الرئتين.

سلم التقييم:

4– الحسابات كلها صحيحة. الرسوم البيانية واضحة ودقيقة وتبيّن العلاقة بين المتغيرات. الشروحات واضحة وكاملة. الملصق واضح ودقيق.

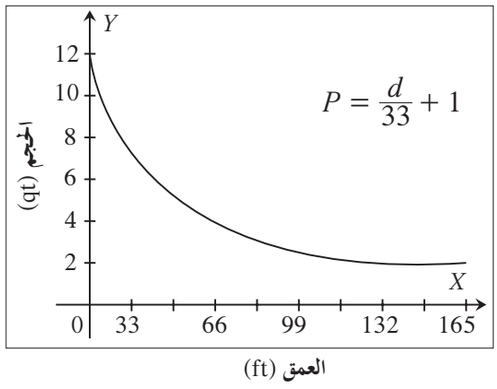
3– الحسابات في معظمها صحيحة. الرسوم البيانية في معظمها واضحة ودقيقة مع بعض الأخطاء الخفيفة. الشروحات غير كاملة. الملصق ينقصه بعض الدقة.

2– الحسابات تحتوي على أخطاء متعددة. الرسوم البيانية غير دقيقة. الملصق غير واضح أو ينقصه معلومات.

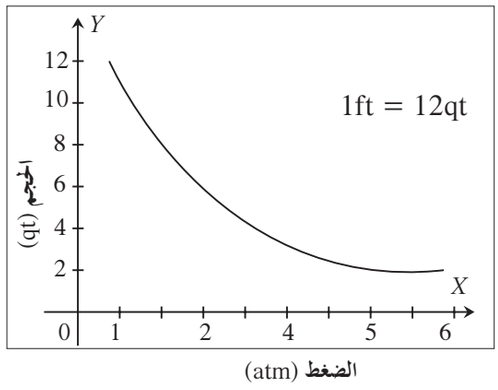
1– معظم عناصر هذا المشروع غير كاملة أو ناقصة.

إجابات مشروع الوحدة:

الحجم (qt)	العمق (ft)
12	0
6	33
4	66
3	99
2.4	132
2	165



الحجم (qt)	الضغط (atm)
12	1
6	2
4	3
3	4
2	6
1	12



إجابة ممكنة:

يستمر الغطاسون في التنفس طيلة صعودهم ليمنعوا انتشار الهواء في رئتيهم والتسبب في الأذى.

العمق (ft)	الضغط (atm)	الحجم (qt)
0	1	60
10	1.30	46
20	1.61	37.4
33	2	30
40	2.21	27.1
50	2.51	23.9
66	3	20
99	4	15

2–1 مشتقة دالة

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد الميول والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.

–يكون الطلاب قادرين على رسم منحنى الدالة f اعتمادًا على منحنى الدالة f' وبالعكس.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

المشتقة، رموز المشتقة، منحنى الدالة f ومنحنى الدالة f' ، الاشتقاق من جهة واحدة.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب، قلم رصاص.

4– التمهيد:

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

(a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-5x+4}$ $-\dfrac{1}{3}$

(b) $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ $\dfrac{1}{6}$

(c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ $\dfrac{1}{4}$

5– التدريس:

إن إحدى الطرائق المفيدة لبداية هذا الدرس تتم بتقديم الرسم البياني لدالة، وبيان كيف أن ميل خطوط القاطع يقترب من نهاية تناظر ميل خط المماس.

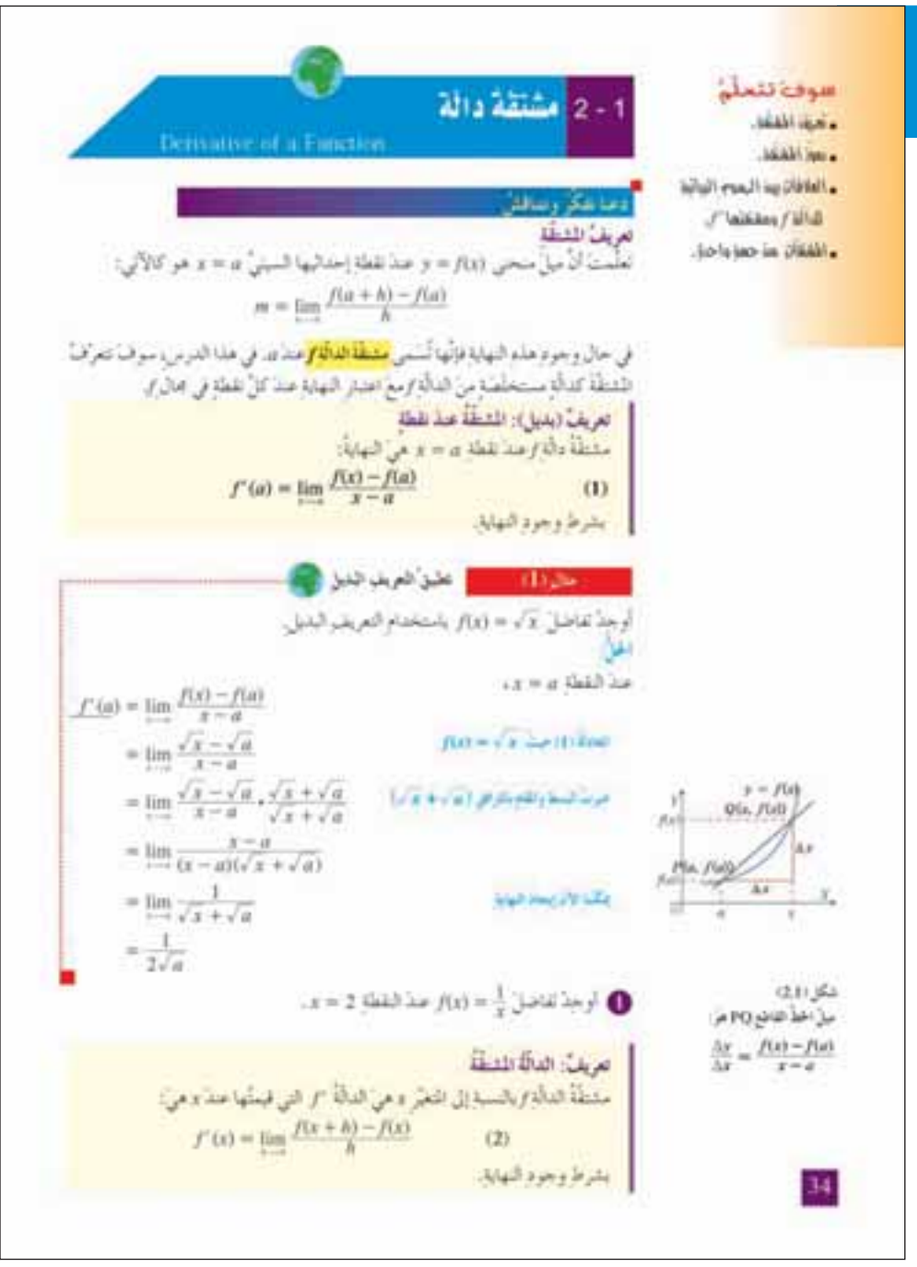
ينبغي أن يتعلم الطلاب كيف يُوجِدون المشتقات باستخدام التعريف. ويمكن عمل هذا على مرحلتين:

(1) إيجاد المشتقة عند نقطة معينة $x = a$.

(2) تعميم العملية لإيجاد المشتقة عند نقطة عامة x.

ينبغي أن تناقش الطرق المختلفة لكتابة المشتقات.

يمكن إنهاء الدرس بمناقشة المشتقات من جهة واحدة. عند مناقشة مشتقات من جهة واحدة لدالة معرفة بقاعدة متفرعة مثل الدالة في مثال (5)، أكِّد أنك توجد قيمة المشتقات من جهة اليسار ومن جهة اليمين لدالة واحدة (وليس لدالتين).


2 - 1 مشتقة دالة

Derivative of a Function

سوف نتعلم

- تعريف المشتقة.
- معنى المشتقة.
- العلاقة بين الرسم البياني لدالة f ومشتقتها f'.
- الاشتقاق من جهة واحدة.

دعنا نفكر ونناقش

تعريف المشتقة

تعلمت أن ميل منحنى $y = f(x)$ عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو كالآتي:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنها تُسمى مشتقة الدالة f عند a. في هذا الدرس، سوف نتعرف المشتقة كدالة مستخلصة من الدالة f مع اعتبار النهاية عند كل نقطة في مجال f.

تعريف (بديل): المشتقة عند نقطة

مشتقة دالة f عند نقطة $x = a$ هي النهاية:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (1)$$

بشرط وجود النهاية.

مثال (1) تطبيق التعريف البديل

أوجد تفاضل $f(x) = \sqrt{x}$ باستخدام التعريف البديل.

الحل

عند النقطة a، $x = a$،

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

1 أوجد تفاضل $f(x) = \frac{1}{x}$ عند النقطة $x = 2$.

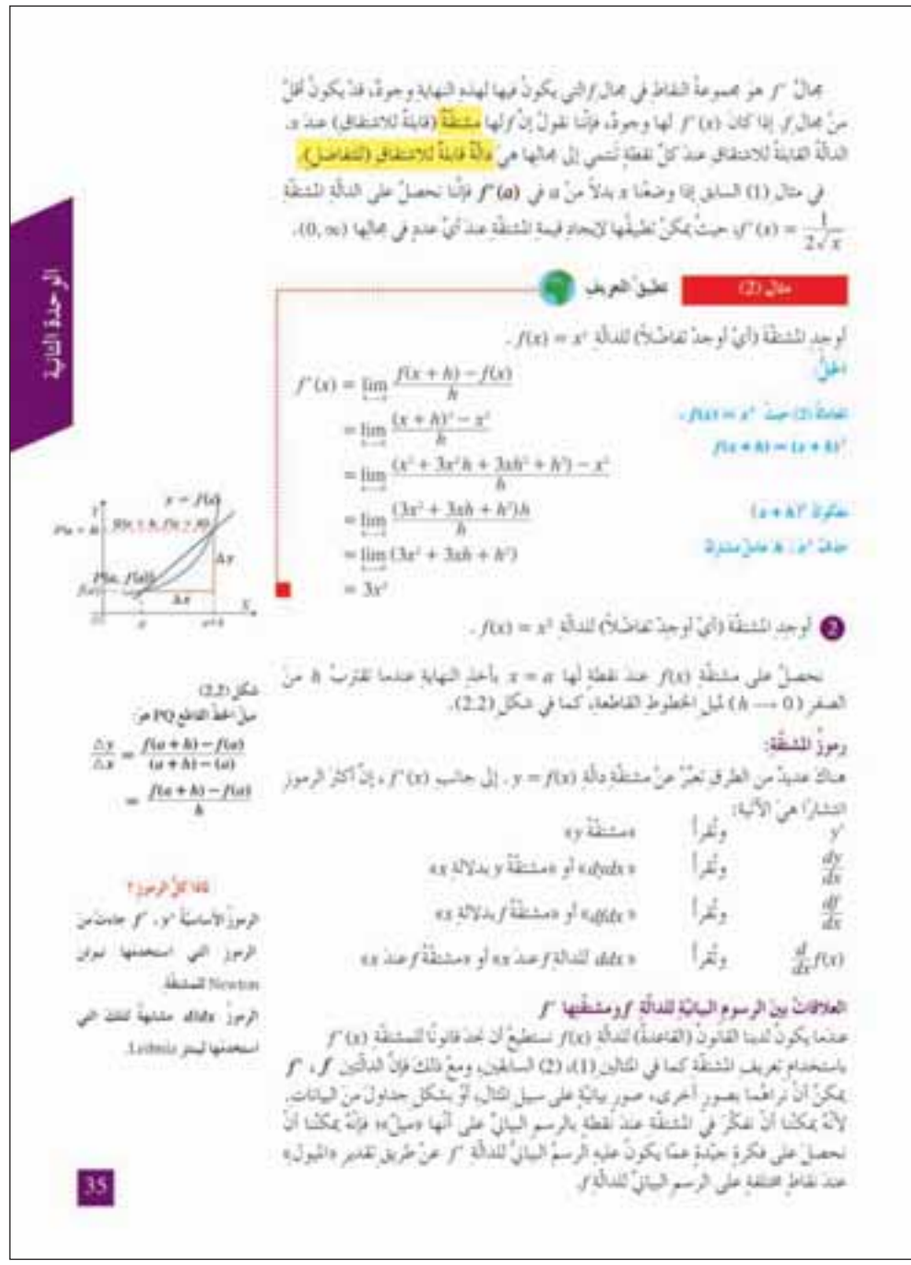
تعريف: الدالة المشتقة

مشتقة الدالة f بالنسبة إلى المتغير x هي الدالة f' التي قيمتها عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (2)$$

بشرط وجود النهاية.

34



ملاحظات على الأمثلة

– في مثال (1): يوجد قيمة مشتقة الدالة $f(x)=\sqrt{x}$. يتطلب الاشتقاق إيجاد عامل مشترك بين البسط والمقام لتبسيط الكسر وإيجاد النهاية.

– مثال (3) يبين بصريًا العلاقة بين الرسوم البيانية لكل من f و f' .

– مثال (4) يبين كيفية الرسم البياني لدالة بمعرفة مشتقتها.

– مثال (5) يبين كيفية حساب قيم مشتقات مباشرة من بيانات في قاعدة متفرعة.

توسعات استكشافية

استكشاف (1): استخدم قلم رصاص وورقة لنسخ الرسوم البيانية في شكل (2.3). ارسم مخططًا يمثل استمرارًا ممكنًا للدالة $f(x)$ لتمثيل الأيام الخمسة التالية. ثم استخدم هذه الطريقة في مثال (3) للرسم البياني للاستمرار المناظر للمشتقة $f'(x)$. استخدم رسومك البيانية لوصف ما حدث للماء في الحفرة على مدى فترة الأيام الخمسة.

6– الربط:

التمرين رقم A–8 يتناول عدد الأرانب وعدد الثعالب في القطب المتجمد والعلاقة بين المنحنيات التي تمثل كل نوع.

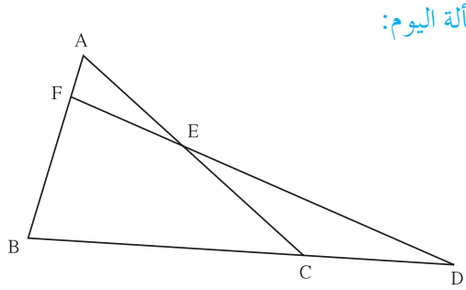
7– أخطاء شائعة:

عند إيجاد مشتقات باستخدام التعريف، غالبًا ما يقع الطلاب في أخطاء عند تقييم وتبسيط البسط الخاص بناتج قسمة الفرق. عندما تكون $f(x)$ كثيرة حدود أو دالة نسبية، فإن (و) تكون دائمًا عاملاً /للمقدار الذي جرى تبسيطه.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: A–2، A–4، A–5، A–6، A–7، A–8. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد تفهموا العلاقة بين منحنيات f و f' .

9– مسألة اليوم:



لدينا: $\frac{DC}{DB}=\frac{2}{3}$

E منتصف $\overline{AC}$ و $\overleftrightarrow{DE}$ يقطع $\overline{AB}$ عند F .

أوجد قيمة: $\frac{AF}{AB}$

نأخذ من C خطًا موازيًا لـ $\overleftrightarrow{AB}$ ونجد: $\frac{AF}{AB}=\frac{2}{5}$

10–إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 1–2

(1) $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\ldots$

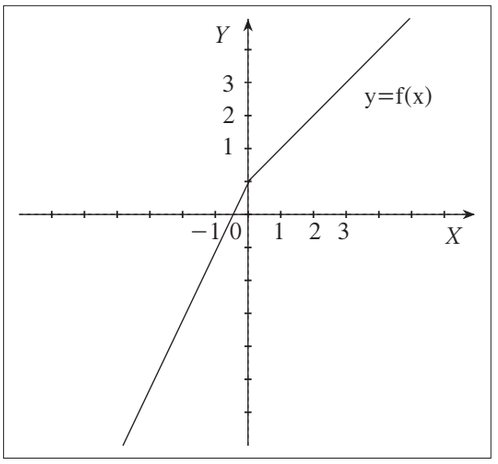
$f'(2)=-\frac{1}{4}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\ldots.$

$f'(x)=2x$

(3)

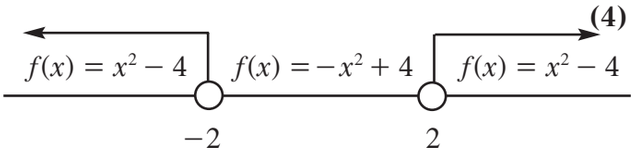


– f دالة متصلة في النقطة $(0, 1)$

– على يسار $x = 0$ الرسم البياني للدالة f له ميل ثابت قدره 3 إذًا هو مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(0, 1)$ و موازٍ للمستقيم $y = 3x$

– على يمين $x = 0$ الرسم البياني للدالة f له ميل ثابت قدره 1 إذًا هو مستقيم ميله 1 يمر بالنقطة $(0, 1)$ وموازٍ للمستقيم $y = x$

(4)



$$f'(-2^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{(-2+h)^2-4-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2-4h}{h} = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h\to 0^+}\frac{-(-2+h)^2+4-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+4h}{h} = +4$$

لا توجد مشتقة عند $x = -2$

$$f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)^2+4-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-4h}{h} = -4$$

$$f'(2^+) = \lim_{h\to 0^-}\frac{(2+h)^2-4-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+4h}{h} = 4$$

لا توجد مشتقة عند $x = 2$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 2–2

(1) نعم

(2) لا

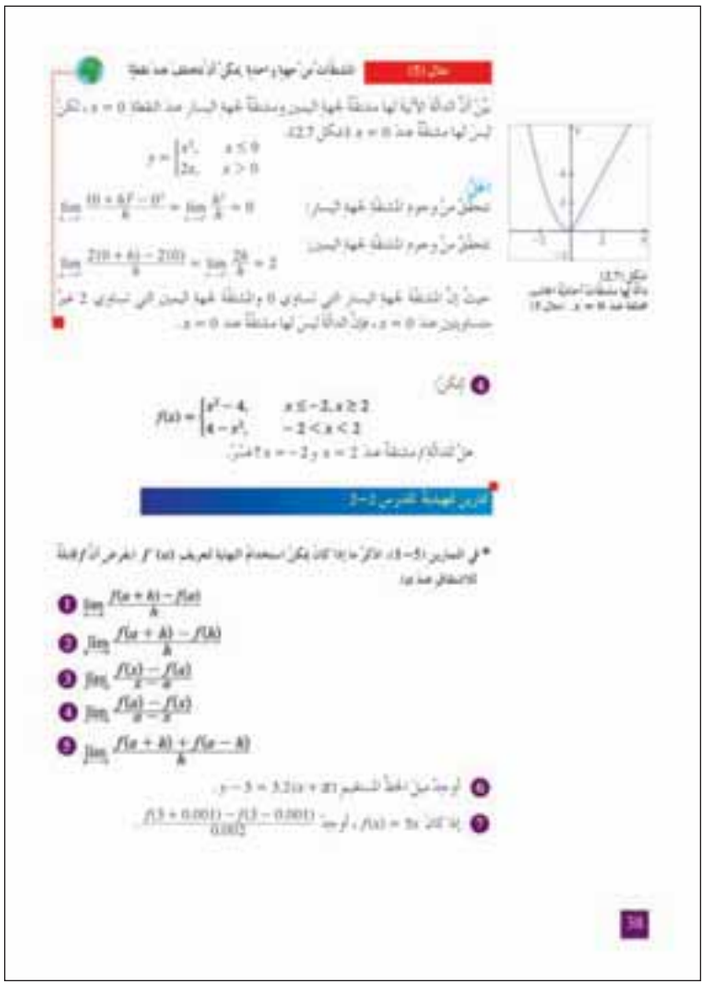
(3) نعم

(4) نعم

(5) لا

(6) 3.2

(7) 5



2–2 قابلية الاشتقاق (التفاضل)

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد النقاط حيث إن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق والتمييز بين الأركان والأنياب والانفصالات والمماسات العمودية على المنحنيات.

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد القيم التقريبية للمشتقات حسابيًّا وبيانيًّا.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

عدم وجود المشتقة عند نقطة ما، الاشتقاق يعطي اتصالاً.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(أ) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x > 0$ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ب) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x < 0$ $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(جـ) أوجد: $f(0)$ ، $f(0^-)$ ، $f(0^+)$

ماذا تستنتج؟ $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 3$

إذًا الدالة متصلة عند $x = 0$

(د) أوجد: (-4) $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

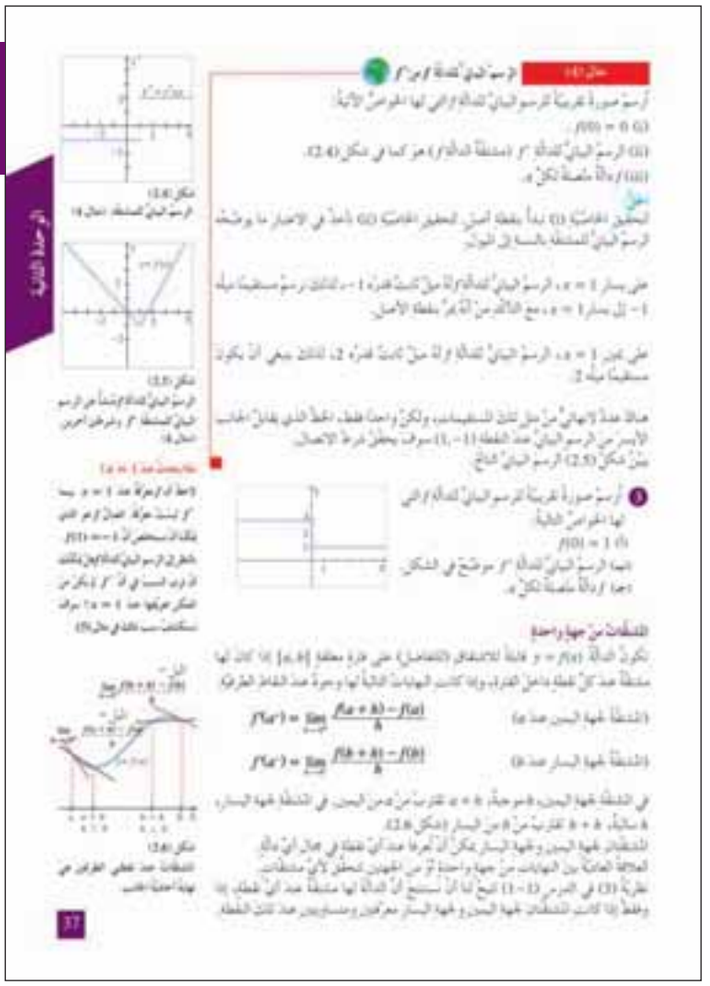
(4) $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

ماذا تستنتج؟ $-4 \neq 4$

وبالتالي ليس لها النهاية نفسها.

5– التدريس:

يمكنك أن تقدم هذا الدرس بمناقشة رسم بياني عن معنى أن تكون دالة قابلة أو غير قابلة للاشتقاق عند نقطة. أعطِ أمثلة عديدة لتوضح الأركان والأنياب (نقاط التقاء قوسين) والمماسات الرأسية وعدم الاتصال .



6– الربط:

لا يوجد.

7– أخطاء شائعة:

ينبغي أن يعرف الطلاب متى تفشل $f'(a)$ في أن يكون لها وجود. فمثلاً، لتكن

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 2\\ \frac{1}{2}x^2+4, & x>2\end{cases}$$

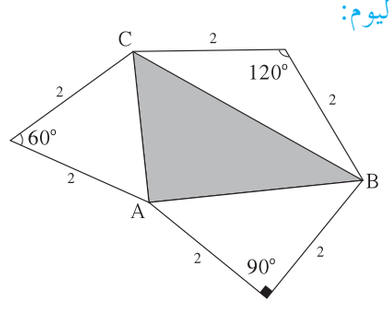
لاحظ أن f ليست متصلة عند $x=2$، لذلك فإن $f'(2)$ ليس لها وجود.

أكّد أن التقنيات الحديثة تجعل معرفة متى توجد المشتقة عند نقطة، أكثر سهولة من أي وقت مضى.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حلّ التمارين A–1، A–3، A–5، A–8. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا معنى الاشتقاق لجهة اليمين أو اليسار لنقطة معينة.

9– مسألة اليوم:



أثبت أن المثلث ABC هو قائم الزاوية في A .

$$AB^2=4+4=8$$
$$AC^2=(2)^2=4$$
$$BC^2=(2\sqrt{3})^2=12$$

نجد أن:

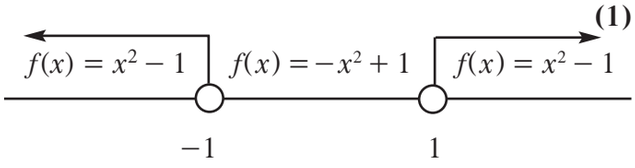
$$AB^2+AC^2=8+4=12$$
$$BC^2=12$$
$$AB^2+AC^2=BC^2$$

إذًا: ABC هو مثلث قائم الزاوية في A .

10–إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 2–2

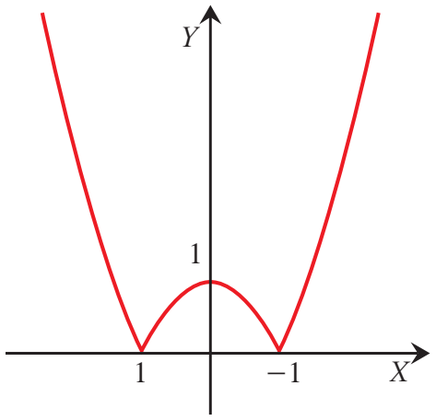
(1)



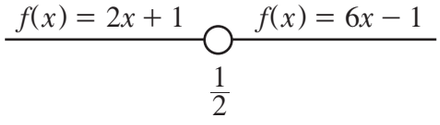
f غير قابلة للاشتقاق في $x = -1$ و $x = 1$ لأن:

$f'(-1^-) = -2; f'(-1^+) = 2$

$f'(1^-) = -2; f'(1^+) = 2$



(2)



$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = f(\frac{1}{2}) = 2$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = f(\frac{1}{2}) = 2$

إذًا f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{1}{2}^-\right) = 2; \quad f'\left(\frac{1}{2}^+\right) = 6$

إذًا f غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 3–2

(1) (a) 7

(b) 7

(c) 7

(d) 0

(2) (a) $\frac{1}{\pi}$

(b) $\frac{-\pi}{x^2}$

قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال Differentiability Implies Continuity

الوحدة الثانية

نظرية (1): قابلية الاشتقاق تضمن الاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة $a = x$، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان

علينا أن نبيّن أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ لو، مكافئ لذلك أن:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أن $x - a \neq 0$)، نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a}\left[(x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$
$$= \lim_{x \to a}(x - a) \cdot \lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$= 0 \cdot f'(a)$$
$$= 0$$

معكوس نظرية (1) ليس صحيحًا، كما رأينا سابقًا. الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو نابٌ أو مماسٌ عمودي، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

تذكر

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

❷ لتكن $f(x) = |2x - 1| + 4x$. بيّن أن f متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$.

تمارين تمهيدية للدرس 3–2

❶ إذا كان $f(x) = 7$ لجميع قيم x الحقيقية، أوجد:

(a) $f(10)$ (b) $f(0)$

(c) $f(x + h)$ (d) $\lim_{x \to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

❷ أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدمًا تعريف المشتقة:

(a) $f(x) = \frac{\pi}{x}$ (b) $f(x) = \frac{x}{\pi}$

41

2–3 قواعد الاشتقاق

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على استخدام قواعد التفاضل لإيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة x^n حيث n عدد صحيح،
مشتقة الضرب والجمع والفرق وناتج القسمة،
المشتقة من الرتبة الثانية والرتب العليا.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

أوجد عوامل التعابير الجبرية:

(a) $x^2 - y^2$ $\quad (x-y)(x+y)$

(b) $x^3 - y^3$ $\quad (x-y)(x^2+xy+y^2)$

(c) $x^4 - y^4$ $\quad (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$

(d) $x^5 - y^5$ $\quad (x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

5–التدريس:

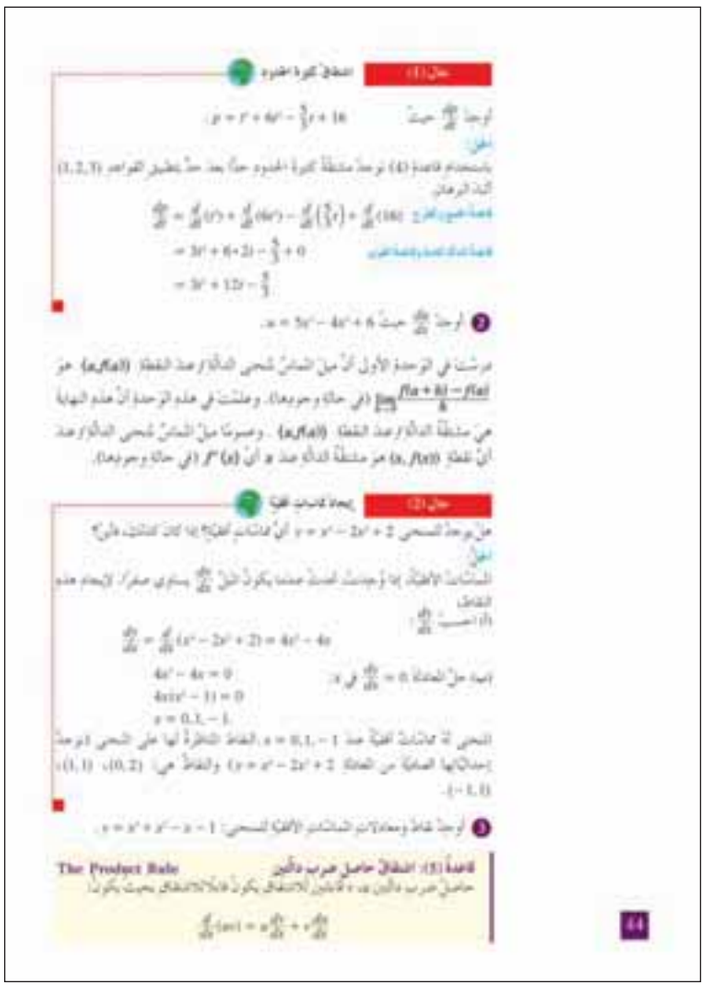
إحدى الطرائق لبدء هذا الدرس هي مناقشة مشتقات دوال خطية. ينبغي أن يفهم الطلاب بسهولة هذه المناقشة، والنتائج هي أمثلة جيدة لبيان أن قاعدة الأسس (القوى) صحيحة.

بنهاية هذا الدرس، ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على اشتقاق كل الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.

تَعَلُّم قواعد الاشتقاق واستخداماتها الصحيحة أمر مهم وأساسي لما يتبع، بما في ذلك عملية تطبيقات المشتقات. قد ترغب في اقتراح تعلم الطلاب القاعدة الآتية كعينة للتذكر:

$$\text{تفاضل}\left(\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}\right) = \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

(حيث تفاضل يعني مشتقة).



6– الربط:

رد فعل جسم الإنسان لجرعة من الدواء يعطى غالبًا بالمعادلة:

$R = M^2\left(\frac{c}{2} - \frac{M}{3}\right)$ حيث $c > 0$ كمية ثابتة و M كمية الدواء الممتصة في الدم. إذا كان رد الفعل تغيرًا في ضغط الدم فإن R تقاس بالمليمتر زئبق.

أما إذا كان رد الفعل تغيرًا في درجة الحرارة فإن R تقاس بالدرجات.

وعندما نجد التفاضل $\frac{dR}{dM}$ نكون قد عرفنا حساسية الجسم لدواء معين.

7–أخطاء شائعة:

يقع الطلاب في كثير من الأخطاء عندما يستخدمون قواعد الاشتقاق في تطبيق القواعد وفي تبسيط الإجابات.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين A–1، A–4، A–7، A–9، A–14. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لمعنى $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

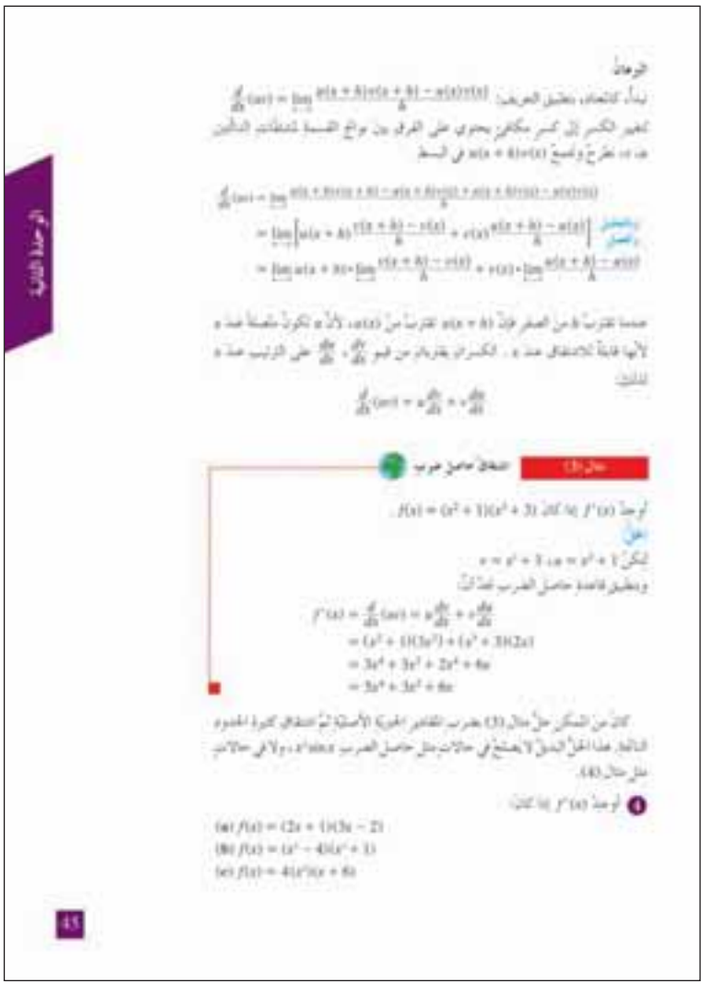
9– مسألة اليوم:

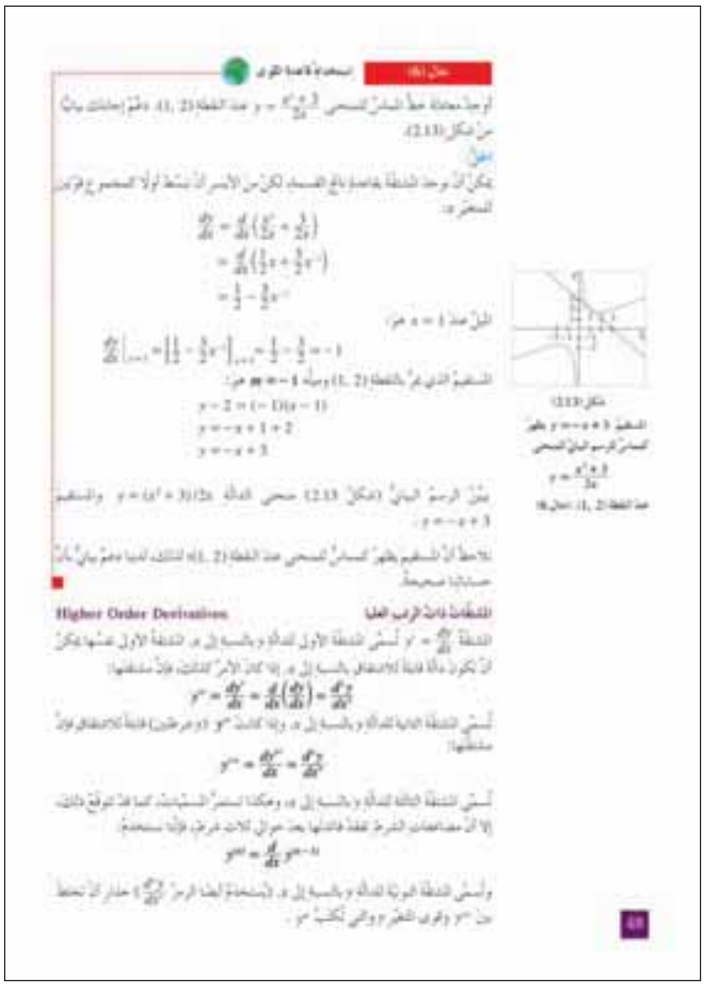
أراد صاحب مؤسسة صنع نموذج لعلبة بدون غطاء علوي قاعدتها مربعة الشكل، بحيث يكون حجمها $4\ dm^3$. يبلغ ثمن مادة التصنيع 20 درهمًا لكل $1\ dm^2$. لنعتبر x طول ضلع القاعدة و h ارتفاع العلبة. أوجد بدلالة x كلفة العلبة ثم أوجد هذه الكلفة إذا كانت $x = 20\ cm$.

$$C(x) = 20x^2 + \frac{320}{x}$$

$x = 20\ cm$ تعطي $x = 2\ dm$

$C(x) = 240\ AED$





10– إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3–2

(1)(a) 0

(b) 0

(c) 0

(2) $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 8x$

(3) المماسات الأفقية:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1; x = \frac{1}{3}$$

النقاط على المنحنى هي: $(-1, 0);\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

(4) (a) $3(2x + 1) + 2(3x - 2) = \ldots$

(b) $3x^2(x^2 - 4) + 2x(x^3 + 1) = \ldots$

(c) $8x(x + 6) + 4x^2(1) = \ldots$

(5) $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$

معادلة المماس:

$$y = 0 + \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

(6) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

(7) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 14x - 4$

$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 14$

$f'''(x) = 60x^2 - 72x$

$f^{(4)}(x) = 120x - 72$

(8) $f'(x) = -\frac{1}{x^2};\quad f''(x) = \frac{2}{x^3};\quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$

$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5};\quad f^{(5)}(x) = \frac{-120}{x^6}\ (x \neq 0)$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 4–2

(1) $\frac{3\pi}{4} \approx 2.356$

(2) $\left(\frac{306}{\pi}\right)^{\circ} \approx 97.403^{\circ}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos a = 0$

(5) $\sin a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) اضرب في $\frac{1+\cos h}{1+\cos h}$ وأكمل

(7) $y = 12x - 35$

2–4 مشتقات الدوال المثلثية

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على استخدام قواعد التفاضل للدوال المثلثية الأساسية.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة الدالة $\sin x$، مشتقة الدالة $\cos x$، مشتقة الدالة $\tan x$.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-\cos 0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\sin\frac{h}{2}$$

$$=-1\times 0=0$$

علمًا أن: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

5–التدريس:

يمكنك أن تبدأ هذا الدرس بأن تطلب إلى الطلاب أن يكملوا مثال (1)، والذي يسمح للطلاب بأن يطبقوا قواعد مشتقات دوال الجيب وجيب التمام. ارتباطًا بهذا الشرح قد ترغب في أن يضع الطلاب قيمًا صغيرة لـ h مثل $h=0.001$ وقيمًا أخرى أصغر وأن يرسموا الرسم البياني لناتج قسمة الفرق: $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$. ينبغي أن يعرف الطلاب منحنى $y=\cos x$.

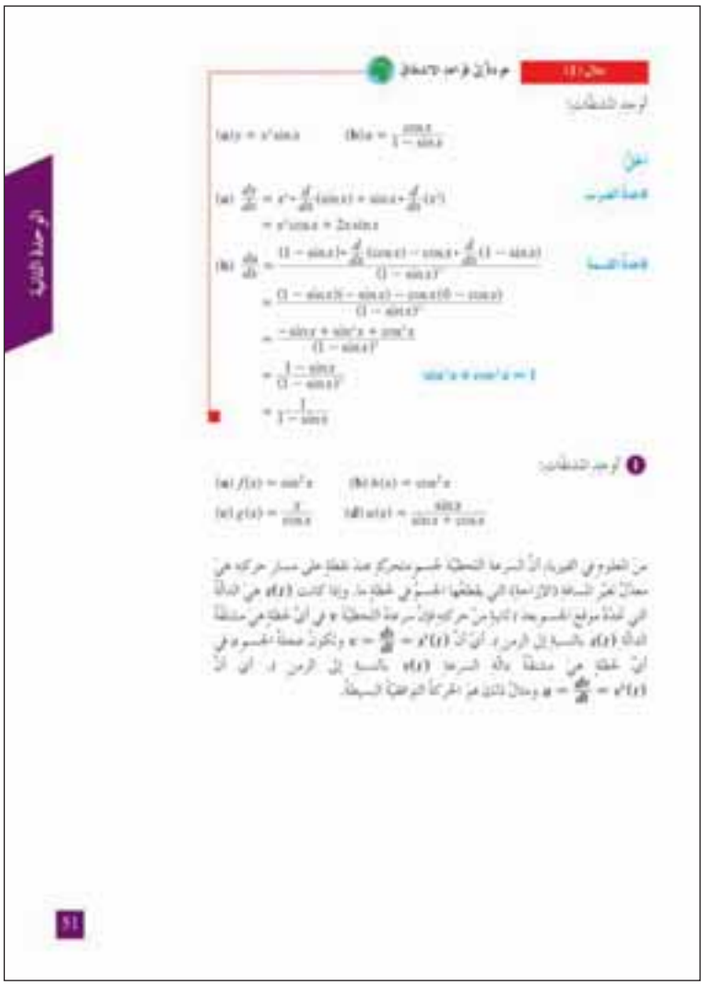
قاعدة اشتقاق $\sin x$ يتم برهنتها من تعريف المشتقة مباشرة، باستخدام نهايتين أساسيتين هما $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ و $\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h)-1}{h}=0$. يمكن الحصول على قاعدة اشتقاق $\cos x$ بطريقة مماثلة . قد ترغب في أن تبرز الدور المهم لقوانين مجموع زاويتين في حالتي $\sin(a+b)$ و $\cos(a+b)$ في هذه الاشتقاقات (التفاضل).

قواعد اشتقاق (تفاضل) الدوال المثلثية الأربع الأساسية الأخرى يمكن أن تعرض بسهولة باستخدام المتطابقات وقواعد اشتقاق دوال الجيب وجيب التمام.

يمكنك أن تلخص الدرس بتقديم جدول يعرض مشتقات الدوال المثلثية الأساسية. اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا طرقًا مختلفة لتذكر هذه المشتقات.

2 - 4 مشتقات الدوال المثلثية
Derivatives of Trigonometric Functions

Simple Harmonic Motion



ملاحظات على الأمثلة:

يبين المثال (1) للطلاب كيفية استخدام مشتقات دوال الجيب وجيب التمام إلى جانب قواعد الاشتقاق السابق تعلمها.

6– الربط:

لا يوجد.

7–أخطاء شائعة:

ينسى الطلاب أحيانًا أو يطبقون خطأً المتطابقات المثلثية الأساسية. وقد ترغب في مراجعة متطابقات فيثاغورس، مجموع الزوايا، نصف الزاوية. عند استخدام حاسبة بيانية أو حاسوب، ينسى الطلاب أحيانًا استخدام مقياس الراديان أو إدخال تعبيرات مثل $\cos^2 x$ بصورة $(\cos x)^2$.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين A–2، A–6، A–9، A–13. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لاشتقاق الدوال المثلثية.

9– مسألة اليوم:

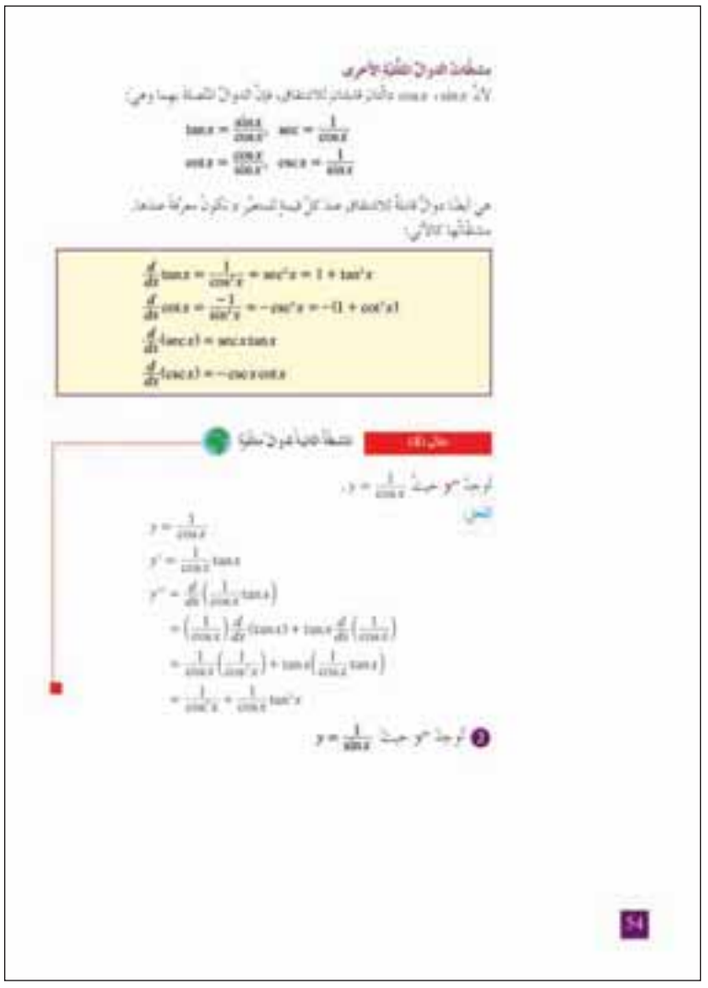
تبلغ مساحة مستطيل $3x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 8$ ويبلغ طوله $x^2 - x + 4$. أوجد محيط هذا المستطيل.

عرض المستطيل:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 8}{x^2 - x + 4} = 3x^2 + x - 2$$

محيط المستطيل:

$$2(x^2 - x + 4) + 2(3x^2 + x - 2) = 8x^2 + 4$$



10–إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 4–2

(1) **(a)** $2\sin x\cos x$

(b) $-2\sin x\cos x$

(c) $\dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$

(d) $\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{\sin x}\Rightarrow y'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{1}{\sin x}\cot x$

$$y''=\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cot x+\frac{1}{\sin^3 x}=\frac{\cos^2 x+1}{\sin^3 x}$$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 5–2

(1) $\sin(x^2+1)$

(2) $\sin(49x^2+1)$

(3) $\sin\left(\dfrac{x^2+1}{7x}\right)$

(4) $g(f(x))$

(5) $g[h(f(x))]$

(6) $h[g(f(x))]$

(7) $f[h(h(x))]$

(8) $f[g(h(x))]$

2–5 قاعدة السلسلة

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.

– يكون الطلاب قادرين على إيجاد ميول المنحنيات البارامترية.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة دالة الدالة، قاعدة الاشتقاق من الخارج إلى الداخل، استخدام قاعدة السلسلة، ميول المنحنيات البارامترية.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

أوجد مشتقات الدوال التالية:

(a) $f(x) = 2x^3 - 5x$ $\quad f'(x) = 6x^2 - 5$

(b) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ $\quad f'(x) = \dfrac{5}{(x+4)^2}$

(c) $f(x) = (2x-1)(3x+4)$ $\quad f'(x) = 2(3x+4) + 3(2x-1)$

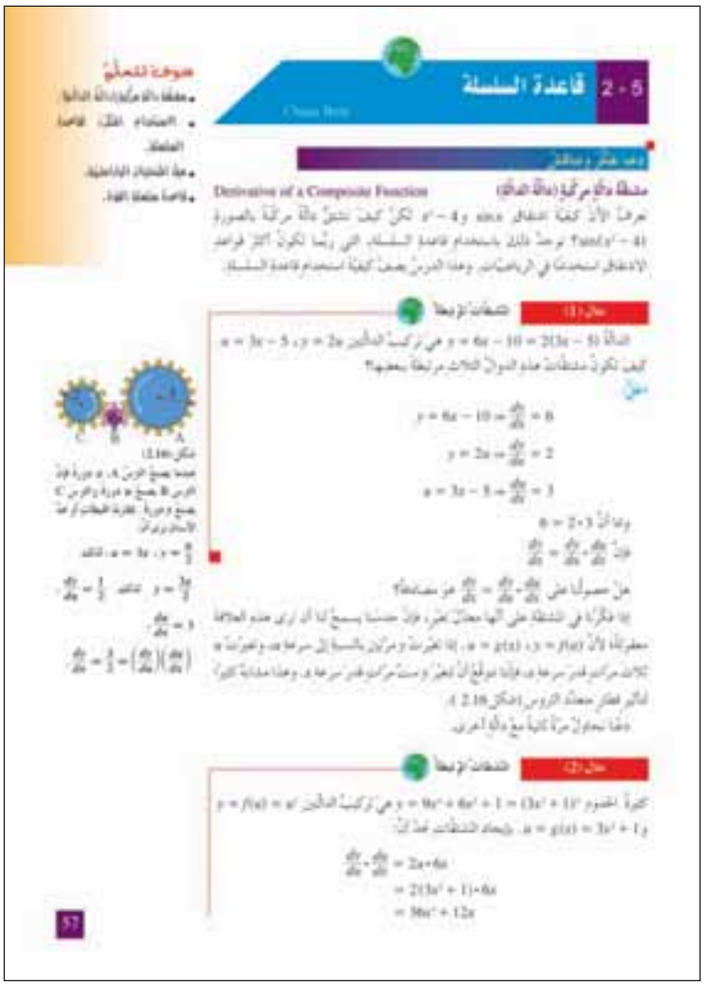
(d) $f(x) = x + \sin x$ $\quad f'(x) = 1 + \cos x$

5–التدريس:

يمكن أن يوفر المثالان (1 و2) مقدمة لقاعدة السلسلة. ولأن هذين المثالين يسهل فهمهما، فإنهما يساعدان على جعل قاعدة السلسلة تبدو معقولة.

يستخدم الكتاب مدخلًا تقليديًّا لتعليم الاستخدام الصحيح لقاعدة السلسلة؛ أولًا: يتعلم الطلاب إيجاد مشتقة (تفاضل) $y = f(g(x))$ بوضع $u = g(x)$، وحساب المشتقتين $f'(u)$ ، $g'(x)$ ثم تطبيق قاعدة السلسلة للحصول على: $y' = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$. عندئذ تختصر العملية بالتعويض عن u والإشارة إلى $g(x)$ على أنها الدالة الداخلية. هذه العملية المختصرة تسمى قاعدة «الخارج – داخل». ينبغي أن يقوم الطلاب بكثير من التدريبات على قاعدة السلسلة حتى يتمكنوا من استخدامها بصورة متقنة.

عند تقديم صيغة ليبنتز لقاعدة السلسلة، $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$، أكّد أن $\dfrac{dy}{dx}$ تحسب قيمتها عند $u = g(x)$، $\dfrac{du}{dx}$ تحسب قيمتها عند x. يمكنك تلخيص معظم هذا الدرس بمناقشة تمرين (13).



ملاحظات على الأمثلة:

■ المثالان: (1)، (2) قصد بهما إعطاء دافعية للفكرة خلف قاعدة السلسلة.

■ يبين مثال (7) كيفية استخدام قاعدة سلسلة القوى. قد ترغب في إبراز أن الحسابات الثلاثة يمكن القيام بها باستخدام قاعدة السلسلة العادية.

6- الربط:

لا يوجد.

7-أخطاء شائعة:

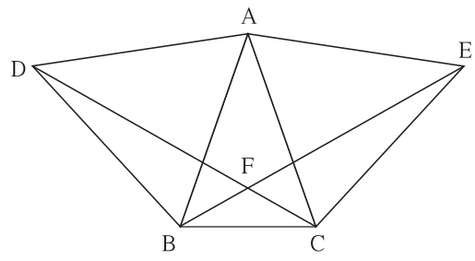
في تطبيق قاعدة (داخل – خارج) لإيجاد مشتقة $f(g(x))$ ، يحدث خطأ شائع بإغفال العامل $g'(x)$ في الإجابة.

ساعد الطلاب من خلال أمثلة متعددة على تخطي هذا الخطأ.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: A–2، A–6، A–9، A–12، A–15. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لاستخدام قاعدة السلسلة.

9- مسألة اليوم:



$\overline{AC} = \overline{AB}$

ABD و ACE هما مثلثان متساويا الأضلاع. $\overline{DC}$ و $\overline{EB}$ يتقاطعان عند F . أثبت أن $\overline{AF}$ متعامدة مع $\overline{BC}$.

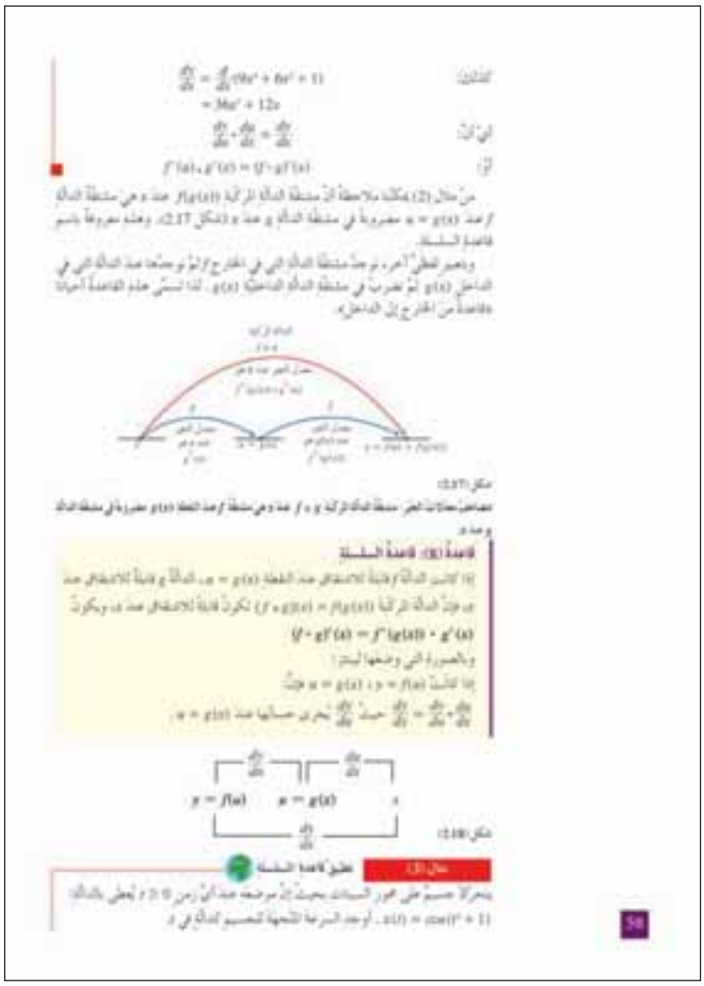
المثلثان DBC و EBC متساويان فنحصل على: $\widehat{FBC} = \widehat{FCB}$

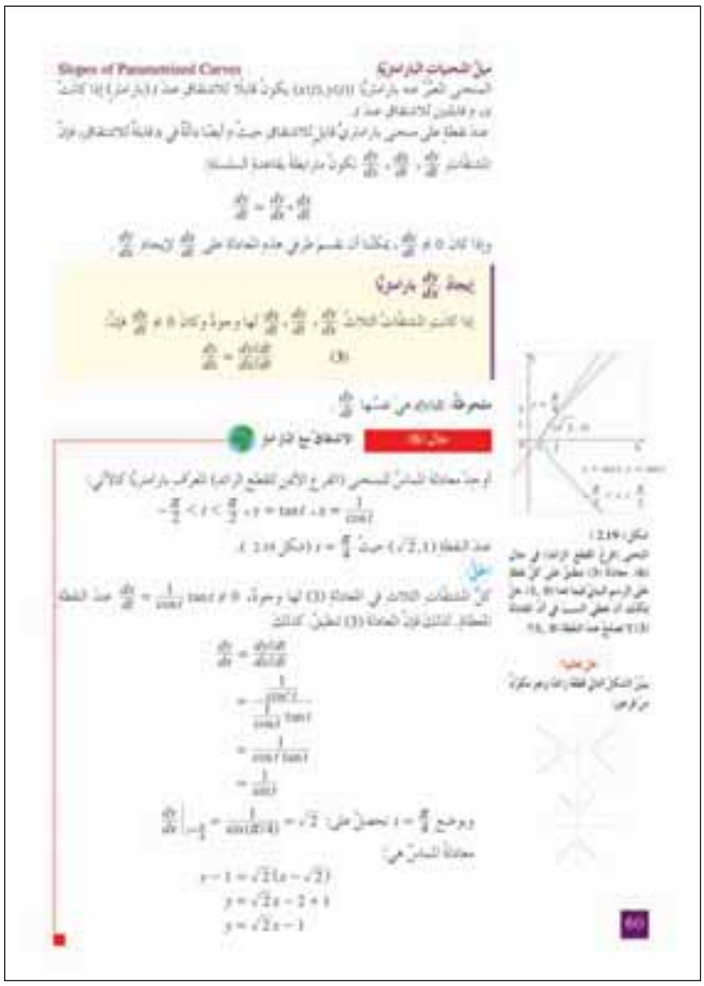
والمثلث FBC متساوي الساقين.

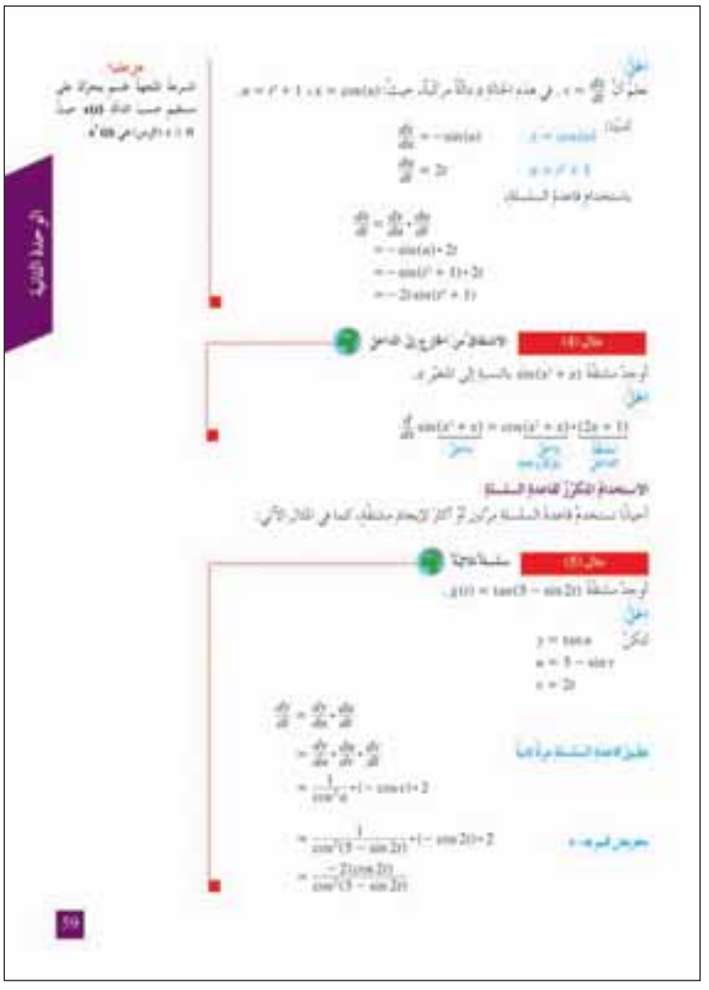
إذًا: $\overline{AF} \perp \overline{BC}$

10- إجابات وحلول:

لا يوجد.



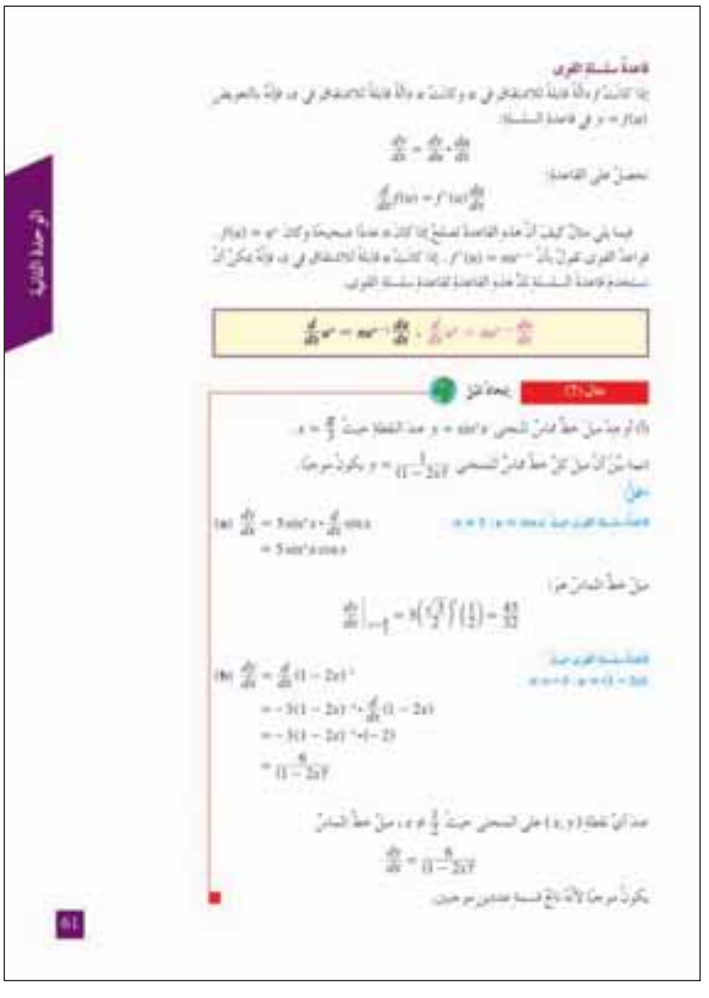




الوحدة الثانية

مثال (4) الاشتقاق من الخارج إلى الداخل

مثال (5) سلسلة ثلاثية



الوحدة الثانية

مثال (7) بعدة أشكال

حل (3) (الاشتقاق بالنسبة للزاوية)

من المهم أن نتذكر أن قاعدة الاشتقاق لكلٍّ من $\sin x$ و $\cos x$ لا تحصل عليها بافتراض أن x مقيسة بالراديان وليس بالدرجات. فالصيغة السابقة تعطينا نظرة معمقة في القرائن الآتية، حيث إن $180^\circ = \pi$ radians، $1^\circ = \pi/180$ radians.

نحوّل الزاوية إلى الراديان ثم نطبّق قاعدة السلسلة على النحو التالي:

و بالراديان $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$

ومنه

$$\sin(x^\circ) = \sin\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x^\circ) = \frac{d}{dx}\left(\sin\frac{\pi x}{180}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right)$$

$$= \frac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

الاشتقاق الضمني

لنحلّ المعادلة $x^2 + y^2 = 4$ الشكل (3.20) يبيّن معرفة عند جميع نقاطه باستثناء النقطتين $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ ، لأنّ المنحنى هو اتحاد منحنيي الدائرين $y = f_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ ، $y = f_2(x) = \sqrt{4 - x^2}$ الثاني أنّ منهما قابلة للاشتقاق عند أيّ نقطة في فترتها عدا $x = \pm 2$. ولكن كيف يمكننا إيجاد ميل المنحنى إذا كان من غير الممكن حلّ المعادلة الأصلية للحصول على الدوال المكوّنة لها؟ الإجابة عن هذا السؤال تتمثّل في اعتبار y دالة قابلة للاشتقاق في x، واشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باستخدام قواعد الاشتقاق التي سبق تعلّمها في هذه الوحدة. وهذا يمكّننا من إيجاد صيغة لـ $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x و y نحسب منها ميل المنحنى عند أيّ نقطة (x, y) على المنحنى. تسمّى عملية إيجاد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ بهذه الطريقة **الاشتقاق الضمني**.

شكل (3.20)

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

ومنه $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

حل (4) (الاشتقاق ضمنياً)

علينا أولاً إيجاد $\frac{dy}{dx}$ معرفة عند أيّ نقطة على منحنى المعادلة

$$2y = x^2 + \sin y$$

الحل

نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة إلى x

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - \cos y\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

وحيث إنّ $-1 \le \cos y \le 1$ لجميع قيم y فإنّ $0 < 2 - \cos y$ لجميع قيم y وعليه فإنّ $\frac{dy}{dx}$ معرفة عند جميع نقاط المنحنى.

مثال (9) الاشتقاق ضمنياً

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2y$

الحل

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باعتبار أن y دالة في x باستخدام الاشتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \left(\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\cdot\frac{dy}{dx}\right)$$

في المثال (9) السابق اشتقنا طرفي المعادلة بالنسبة إلى x وحصلنا على $\frac{dy}{dx}$ كدالة في y وبالنظر إلى الشكل (2.21) الذي يمثل منحنى المعادلة $x = 2y$ نجد أنه لا يوجد للمنحنى مماسان يقابل كل قيمة لـ x (باستثناء $x = 0$)، فمثلاً عندما $x = 4$ يوجد للمنحنى مماسان، الأول عند النقطة $P(4, 2)$ والآخر عند النقطة $Q(4, -2)$.

وعموماً في الاشتقاق الضمني نحصل على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ كدالة في x و y كما هو الحال في المثال (10) التالي.

شكل (2.21)

مثال (10) الاشتقاق ضمنياً

أوجد من الشكل (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ ميل المماس عند النقطة $(-4, 3)$.

الحل

المنحنى ليس رسماً بيانياً لدالة واحدة، لكنه اتحاد منحنى دالتين فقط من الاشتقاق هما

$$y_1 = \sqrt{25 - x^2}$$

$$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$$

النقطة $(-4, 3)$ تقع على منحنى الدالة y_1، فنجد أن المنحنى عندها هو قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = -4$ ، $y = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-2x)}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4,3)} = \frac{-4}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{4}{4}$$

ويمكن إيجاد ميل المنحنى عند النقطة $(-4, 3)$ بسهولة باستخدام الاشتقاق الضمني للمعادلة الأصلية بالنسبة إلى x.

شكل (2.22)

وعموماً، نتبع عملياً الاشتقاق الضمني وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1- اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x

2- تجميع المقدوم الذي يحوي $\frac{dy}{dx}$ في أحد أطراف المعادلة

3- إخراج $\frac{dy}{dx}$ كعامل مشترك

4- حلّ المعادلة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ كدالة في x و y

تعلم ذاتي

أوجد بنفسك

إن معدل الهواء الذي يستخدمه جرّاح جهاز التنفس المغطى يعتمد على عدد من العوامل مثل: عمر المريض ومعدل تنفسه من الهواء والأهم هو العمل الذي يبذله المريض.

يستمر جهاز التنفس المغطى بالعمل الطبيعي بينما المريض نائم. في كل شهيق يستنشق المريض الهواء يبدأ جرّاح الجهاز في تزويد المريض بالهواء وهذا يعني أن كمية الهواء التي تخرج من الجرّاح هي تزايدية وفي الوقت نفسه يزداد الضغط أيضاً كلما زاد العمل تزايداً. وكلما زاد العمل، احتاج المريض إلى كمية أكثر من الهواء ويتذكر جرّاح وكمية الوقت في استهلاك الهواء هي تناسبٌ عكسيٌ للضغط عند العمل الذي يبذله المريض. على افتراض أن جرّاح الجهاز فيه كمية من الهواء تكفي لـ 60 دقيقة للوصول إلى سطح المياه بالوقت (t) ثم للعمل إلى عمق قدمه h 599

ملاحظة: الضغط هو $\frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}}$ أو $\frac{\text{الشغل}}{\text{الحجم}}$ أو $\frac{\text{العمل}}{\text{الحجم}}$ مركبات أكثر. العمل مجدولاً بين كم من الوقت سوف يحسب الهواء عند 0 و 10 و 20 و 33 و 40 و 50 و 66.

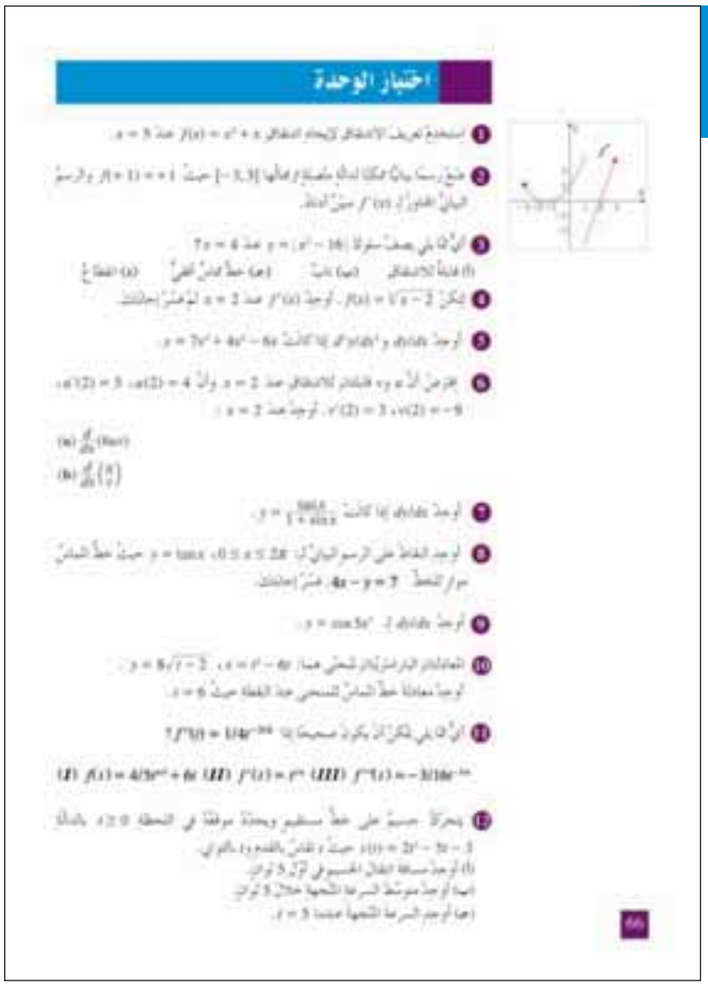
يرتبط في هذه الفقرة استخدمنا $PV = 60$

تعلم ذاتي

الجهاد المشروع

الجهاد المشروع ممنوع نفصلاً تشرح فيه ما قرأته عن جهاز التنفس المغطى وحاجته إلى الحماية. استخدم الرسوم البيانية والجداول والأمثلة لدعم نتائجك. اعمل مع زملائك على دراسة مشتركة. تحقق من أن رسومك البيانية لو أمثلتك صحيحاً وفروعاتك واضحة. إذا كانت غير متأكد من أيّ شيء فتكلك العودة إلى مراجع تبحث عن جهاز التنفس المغطى.

تكلم مع أحد المحترفين في المجال ما يعرفه متخصّص. اسأل المحترف عن اختراعهم وتوصياتهم.



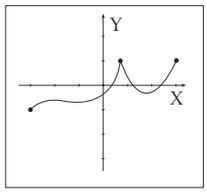
اختبار الوحدة

إجابات اختبار الوحدة الثانية

(1) $f'(5) = \lim_{h \to 0} \dfrac{[(5+h)^2 + (5+h)] - (5^2 + 5)}{h}$

$= 11$

(2)



(3) (ب)

(4) $f'(2) \to \infty$. يوجد خط مماس عمودي عند $x = 2$.

(5) $21x^2 + 8x - 6\,;\, 42x + 8$

(6) (a) -198

(b) $-19/27$

(7) $\dfrac{1 + \sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x (1 + \sin x)^2}$

(8) $\left(\dfrac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\dfrac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right), \left(\dfrac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\dfrac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$

(9) $-15x^2 \sin 5x^3$

(10) $y = \dfrac{x}{3} + 14$

(11) (هـ) II و III

(12) (أ) الانتقال:

$s(5) - s(0) = (2(125) - 25 - 3) - 3$

$= 219\, ft/\sec$

(ب) متوسط السرعة: $\dfrac{219}{5} = 43.8$ ft/ sec

(جـ) السرعة المتجهة: $s'(t) = 6t^2 - 5$

عند $t = 5$

$s'(5) = 6(25) - 5 = 145$ ft/ sec

(د) $s''(t) = 12t$

$s''(5) = 12(5)$

$s''(5) = 60\, ft/sec$

(هـ) يتغير الاتجاه عند $s'(t) = 0$

$6t^2 - 5 = 0$

$t^2 = \dfrac{5}{6}$

$t = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$t \approx 0.9$ sec

(13) (أ) الانتقال: $2x\,dx + 2y dx + 2x dy - 6y dy = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{x + y}{3y - x}$

$y'_{(1,1)} = \dfrac{2}{2} = 1$

ميل الخط العمودي عند النقطة $(1,\ 1)$ هو -1 ومعادلته:

$$y = 1 - 1(x - 1)$$
$$y = -x + 2$$

(ب) التقاطع من جديد:

$$x^2 + 2x(-x+2) - 3(-x+2)^2 = 0$$
$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$
$$x = 1 \text{ أو } x = 3$$
$$(1,\ 1)\ ;\ (3,-1)$$

(14) $xdy + ydx + 2dx - dy = 0$

$$\frac{dx}{dy} = y' = \frac{2+y}{1-x}$$

ميل الخط $2x + y = 0$ هو -2 إذًا:

$$\frac{1}{2} = \frac{2+y}{1-x}$$
$$x = -2y - 3$$

في المعادلة الأولى:

$$(-2y-3)(y) + 2(-2y-3) - y = 0$$

فنجد النقاط: $(-1,-1)\ ;\ (3,-3)$

المعادلتان: $y = -2x - 3$

$y = -2x + 3$

(15) المنحنى الأول: $2x^2 + 3y^2 = 5$

$$\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(5)$$
$$4x + 6y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$$

المنحنى الثاني: $y^2 = x^3$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^3)$$
$$2y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

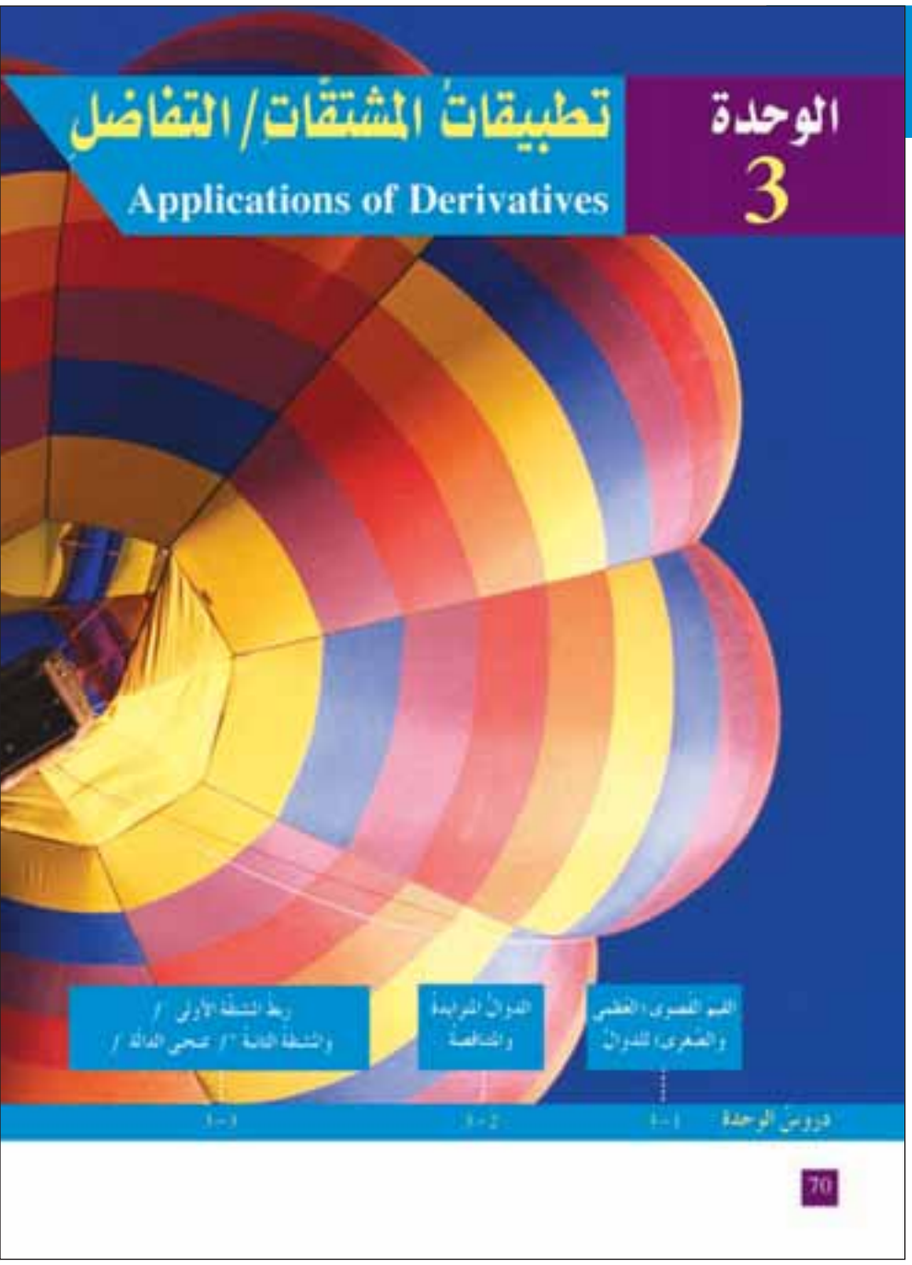
عند النقطة: $(1,1)$ ميل المماس الأول هو $-\frac{2}{3}$ وميل المماس الثاني هو $\frac{3}{2}$ إذًا $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = -1$ وبالتالي المنحنيان متعامدان عند $(1,1)$.

(16) $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[8(s-t)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{d}{dt}(1)$

$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{ds}{dt} - 1\right)$$
$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}(V-1)\left(\frac{ds}{dt} = V\right)$$
$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(8(s-t)^{-\frac{1}{2}} + 1\right) - 1\right]$$
$$= 32(s-t)^{-\frac{1}{2}}(s-t)^{\frac{1}{2}} = 32\, ft/sec^2$$

إذًا العجلة هي $32\ \text{ft/sec}^2$

الوحدة 3 تطبيقات المشتقات/التفاضل



لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسِّمَت هذه الوحدة إلى 5 دروس على النحو الآتي:

3–1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال (ص 78–72)

المصطلحات الأساسية: القيم القصوى المطلقة، قيمة عظمى محلية، قيمة صغرى محلية، النقطة الحرجة.

3–2 الدوال المتزايدة والمتناقصة (ص 84–79)

المصطلحات الأساسية: القيمة المتوسطة، الدالة المتزايدة، الدالة المتناقصة.

3–3 ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f (ص 93–85)

المصطلحات الأساسية: المشتقة، التقعر، نقطة الانقلاب (الانعطاف).

3–4 النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى) (ص 102–94)

المصطلحات الأساسية: النمذجة، الأوفقية، القيمة العظمى للربح، التكلفة المتوسطة، التكلفة الحدية.

3–5 المعدلات المرتبطة (ص 107–103)

المصطلحات الأساسية: المعدل المرتبط.

ماذا سيتعلم الطلاب؟
ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة القيم القصوى المحلية الصغرى والعظمى والنقاط الحرجة وتطبيقاتها في مواقف حياتية مثل الاقتصاد والطب وغير ذلك. ثم يعمقون معارفهم بتأثير مشتقة الدالة على سلوكها من ناحية تزايدها أو تناقصها، ويحددون التقعر ونقاط الانقلاب للمنحنى.

مشروع الوحدة
عرض المشروع:

اسأل الطلاب وصف ما يحدث عندما تنتقل بالحافلة من البيت إلى المدرسة وأنت تحمل كوبًا من العصير. ناقش معهم تأثير حركة السيارة أو الحافلة على توازن الأجسام الموجودة داخلها.

سلم التقييم:

4 – الشروحات واضحة ومفهومة بكاملها. الحسابات دقيقة ومفصلة. الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة جدًّا مع النتيجة النهائية. التقرير مفصل وواضح ومفهوم. القوانين المستخدمة كلها صحيحة.

3 – الشروحات واضحة ومفهومة. الحسابات معظمها دقيقة. الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة وقريبة من النتيجة النهائية. التقرير مفصّل ولكن ينقصه بعض الإيضاح. القوانين في معظمها صحيحة.

2 – الشروحات ينقصها الوضوح، وفي بعض الأحيان غير مفهومة. أخطاء متعددة في الحسابات. بعض القوانين المستخدمة غير مقبولة. لا ترابط بين الرسم البياني والنتيجة النهائية. التقرير غير مفصّل.

1 – معظم عناصر المشروع ناقصة أو تحتوي على أخطاء كثيرة.

إجابات مشروع الوحدة:

(1) (أ) $y_1 = -\frac{B}{2}$ ؛ $y_2 = \frac{y}{2}$ ؛ $y_3 = \frac{H}{2}$

(ب)
$$m_1 = \pi\delta(R+T)^2 B$$
$$m_2 = \pi\delta R^2 y$$
$$m_3 = \delta\pi(R+T)^2 H - \delta\pi R^2 H$$
$$m_3 = \delta\pi T^2 H + 2\delta\pi RTH$$

(جـ)
$$\bar{y} = f(y) = \frac{-\frac{1}{2}(R+T)^2 B^2 + \frac{1}{2}R^2 y^2 + \frac{H}{2}(T^2 H + 2RTH)}{B(R+T)^2 + R^2 y + T^2 H + 2RTH}$$

(د) نعوض كل رمز بقيمته العددية فنجد بعد الاختزال أن

$$\bar{y} = f(y) = \frac{y^2 + 21.75}{2y + 8.5}$$

(2) (أ) الرسم البياني (آلة حاسبة أو حاسوب)

(ب) حوالي 2 cm . وهي ارتفاع نقطة الاتكاز عن قاعدة الكوب.

(جـ)
$$f'(y) = \frac{2y(2y+8.5) - 2(y^2 + 21.75)}{(2y+8.5)^2}$$
$$f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 44}{(2y+8.5)^2}$$

(د)

الفترات	$0 < y < 2.08$	$y > 2.08$
إشارة $f'(y)$	–	+
سلوك $f(y)$	↘	↗

(هـ) القيمة المحلية الصغرى تحدث عند $y \approx 2.08\,cm$ وهي قيمة قريبة جدًّا من $y = 2\text{ cm}$.

(و) يجب أن تكون كمية القهوة على أدنى ارتفاع وهو تقريبًا 2.08 cm حتى يبقى الكوب في أفضل حالة ثبات فيما تسير السيارة. وتكون نقطة الارتكاز على ارتفاع 2.06 cm تقريبًا.

* تتنوع الإجابات.

3–1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على تحديد القيم القصوى (العظمى والصغرى) والقيم المحلية والمطلقة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

قيم قصوى مطلقة، قيم قصوى محلية (نسبية).

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 6x + 2$

(أ) اطلب إلى الطلاب إكمال الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$								

(ب) اطلب إليهم تعيين النقاط الموجودة في الجدول على شبكة إحداثيات.

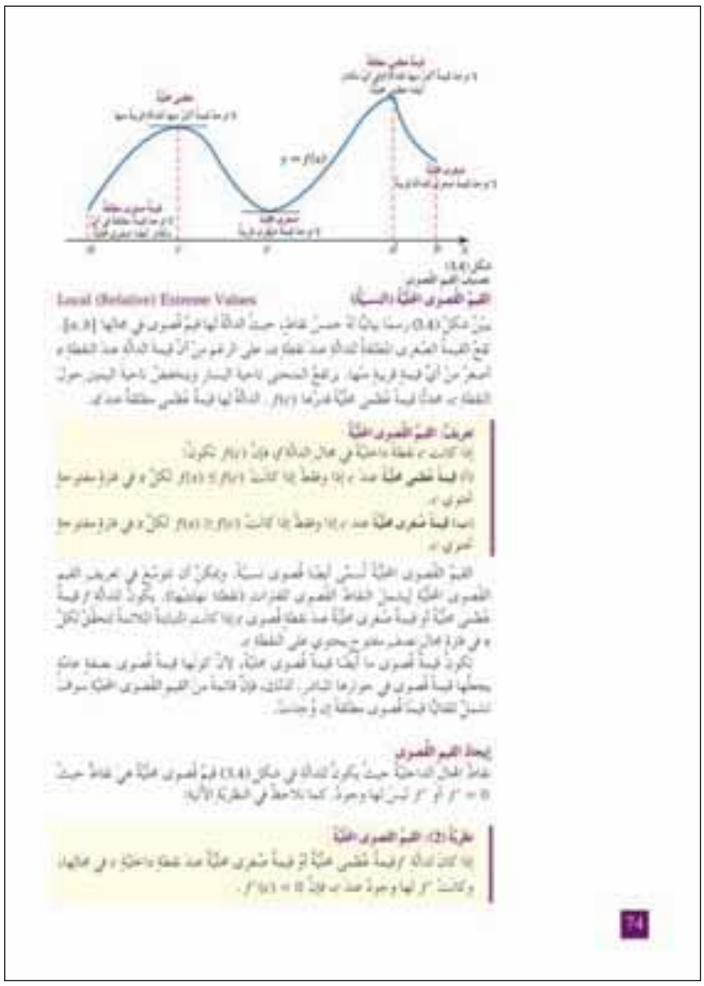
(جـ) اسألهم: هل يوجد قيم صغرى؟ وقيم عظمى؟

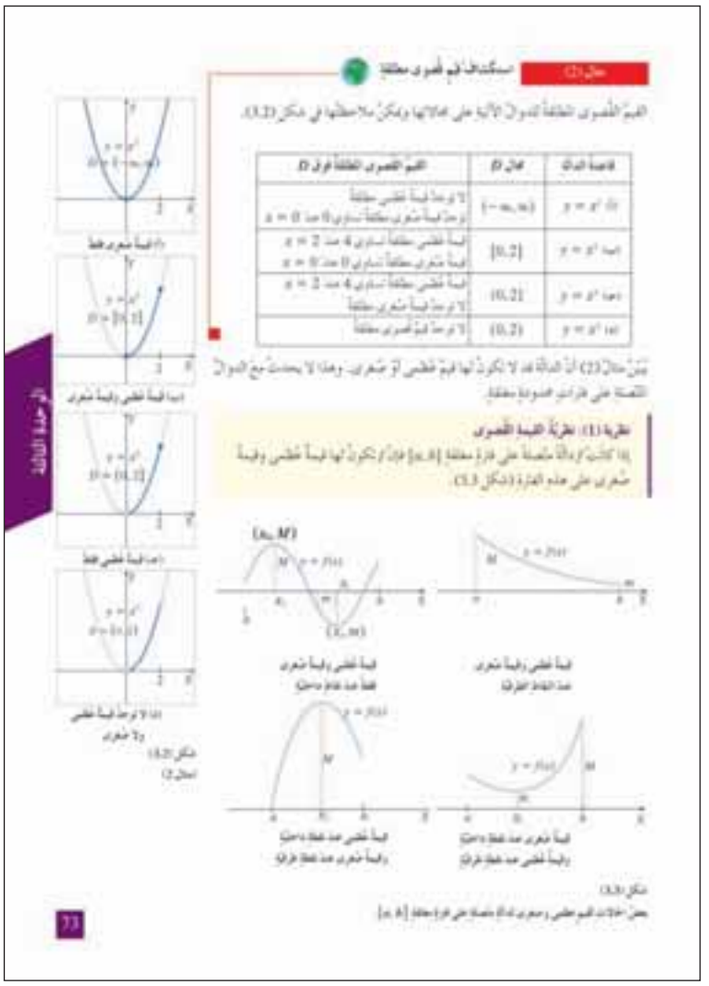
5– التدريس:

إن إحدى الطرائق للبدء في هذا الدرس هي رسم مخطط لدالة مثل تلك المبينة في شكل (4–3)، ومناقشة القيمة الصغرى والعظمى (المطلقة) المحلية. ويمكن للطلاب أن يفهموا تعريفات تلك المفاهيم بسهولة أكبر إذا ما تلقوا تقديمًا حدسيًّا لهذه المعاني. ويعد فهم القيم العظمى والقيم الصغرى أمرًا حاكمًا في دراسة تطبيقات المشتقة. يحتاج الطلاب إلى لغة التفاضل والتكامل، لذا شدد على مصطلحات هذا الدرس. لذلك فإنه يكون من المهم ضم المهارات الجبرية المكتسبة سابقًا إلى دراسة التفاضل والتكامل. يوفر مثال (1) نتيجة ذات معنى لهذا الدرس.

ملاحظات على الأمثلة:

يبين مثال (2) كيف يمكن أن تتغير القيم القصوى لدالة بسيطة من دوال كثيرة الحدود بحسب المجال المختار . قد ترغب في التوسع في هذا المثال بمناقشة القيم القصوى المحلية والمطلقة على مجالات إضافية مثل $[-4,2]$، $(-4,2)$، $[-4,\infty)$.





6– الربط:

تُنمذج الدالة: $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ حيث $0 < x < 5$ حجم صندوق أبعاده موجودة كعوامل في $V(x)$. أوجد قيمة x التي تعطي أكبر حجم لهذا الصندوق. ما أكبر حجم؟

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$
$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$
$$= 4(x - 2)(3x - 20)$$
$$x = 2,\ x = \frac{20}{3}$$

القيمة $\frac{20}{3}$ غير مقبولة لأنها أكبر من 5 .

x	0		2		5
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	144	↘	

وبالتالي الحجم الأكبر للصندوق يتحقق عند $x = 2$ وهو 144 وحدة مكعبة وأبعاده هي: 12، 6، 2.

7– أخطاء شائعة:

سيفترض بعض الطلاب أن النقطة الحرجة تناظر دائمًا قيمة قصوى محلية؛ لذلك، من الضروري أن يلاحظ الطلاب بعض الأمثلة التي لا تتحقق فيها تلك العلاقة مثل $f(x) = x^3$.

عند إيجاد النقاط الحرجة لدالة، سيتغاضى بعض الطلاب عن إيجاد النقاط حيثما تكون المشتقة غير معرفة بينما الدالة معرفة عند تلك النقاط مثل $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين A–2، A–6، A–9، A–12، A–16. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لمعنى قيم قصوى محلية وقيم قصوى.

9– مسألة اليوم:

وجد صاحب مصنع ثلاجات أن الكلفة الكلية من x وحدة هي: $C(x) = 200x^2 + 300x + 9000$ بالدولار، علمًا بأن سعر الثلاجة الواحدة يبلغ 1200$.

(أ) إذا باع في أسبوع واحد x ثلاجة فما هي دالة الربح $P(x) = R(x) - C(x)$ ؟

$$R(x) = 1200x$$
$$P(x) = -20x^2 + 900x - 9000 = 0$$

(ب) أوجد قيم x عندما يكون $P(x) = 0$.

$$-20x^2 + 900x - 9000 = 0$$
$$x = 15,\quad x = 30$$

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3-1

(1) قيمة عظمى واحدة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي 2 وقيمتان صغريان عند $x = 0$ و $x = \pi$. في الحالتين هي 1.

(2) (a) لا يوجد.

(b) قيمتان: -18 ، 0.

(c) قيمة واحدة: -18 .

(d) لا يوجد.

(3) القيمة العظمى المطلقة هي 1 عند $x = 1$.
القيمة الصغرى المطلقة هي $\frac{1}{9}$ عند $x = 3$.

(4) قيمة عظمى مطلقة 1 عند $x = 2$.
قيمة صغرى مطلقة 0 عند $x = 1$ ، $x = 3$.

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 3-2

(1) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(2) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

(3) $[-2, 2]$

(4) $[-2, 2]$

(5) $(-2, 2)$

(6) $x \neq -1$ و $x \neq 1$

(7) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(8) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

(9) $c = 3$

(10) $c = -4$

3–2 الدوال المتزايدة والمتناقصة

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على تطبيق نظرية القيمة المتوسطة وإيجاد الفترات من المجال، حيث تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

نظرية القيمة المتوسطة، تفسير فيزيائي، تزايد الدوال وتناقصها.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(أ) اطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقة الدالة. $f'(x) = 2x - 4$

(ب) اسألهم حل ما يلي:

(a) $f'(x) = 0$ $\quad x = 2$

(b) $f'(x) > 0$ $\quad x > 2$

(c) $f'(x) < 0$ $\quad x < 2$

(جـ) اطلب إليهم إكمال الجدول التالي.

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$						
$f(x)$						

(د) اسألهم ماذا يلاحظون بالنسبة إلى إشارة $f'(x)$ وتغير سلوك $f(x)$ لقيم $x < 2$ وقيم $x > 2$.

5– التدريس:

لإثارة دوافع الطلاب إلى دراسة نظرية القيمة المتوسطة، قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بمناقشة تطبيق سهل مثل تلك التطبيقات المقدمة في مثال (3).

خُذ بعض الوقت في مناقشة كل من فروض ونتائج نظرية القيمة المتوسطة. أهمية نظرية القيمة المتوسطة هي أنها تسمح لنا باستنتاج خواص دالة من مشتقتها.

في نتيجة (1)، لاحِظ استخدام فترات مفتوحة ومغلقة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة. ويحتاج الطلاب إلى أن يفهموا أن العبارة f متزايدة في الفترة $[a, b]$ لا تعني أن $f'(a) > 0$ أو $f'(b) > 0$. وينبغي أن يفهموا – كذلك – أنه إذا كانت f متزايدة في الفترة $[a, b]$ ومتناقصة في الفترة $[b, c]$، فإن ذلك لا يعني أن f تكون «متزايدة ومتناقصة» عند النقطة b .

ملاحظات على الأمثلة:

– يوفر مثال (3) تطبيقًا من واقع الحياة لنظرية القيمة المتوسطة عن طريق إظهار الترابط بين المتوسطات والمعدلات اللحظية.

– يركز مثال (4) على استخدام الفترات المغلقة (باستثناء $-\infty$ و ∞) حيثما تتزايد الدالة أو تتناقص.

6– الربط:

التمرين رقم B–17.

7– أخطاء شائعة:

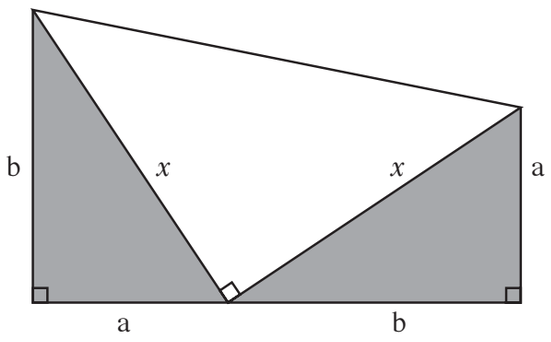
عند تطبيق نتيجة (1) لتحديد أين تكون الدالة f متزايدة، يمكن أن تقع أخطاء عند حل المتباينة $f'(x) > 0$، إما بتحليل خطأ للدالة $f'(x)$ أو بخطأ في تحليل الإشارة. ينبغي أن يمكّن التأكيد البياني الطلاب من اكتشاف مثل هذه الأخطاء. يجد بعض الطلاب صعوبة في استخدام فترات مغلقة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين A–1، A–4، A–8، A–9. تحقق من عمل الطلاب. تأكد من أنهم قد فهموا تزايد الدوال وتناقصها والقيمة المتوسطة.

9– مسألة اليوم:

استخدم قيم مساحات مناسبة لتثبت من خلال هذا الرسم أن $x^2 = a^2 + b^2$ (ملاحظة: يمنع رسم أي خطوط إضافية).



– مساحة شبه المنحرف:

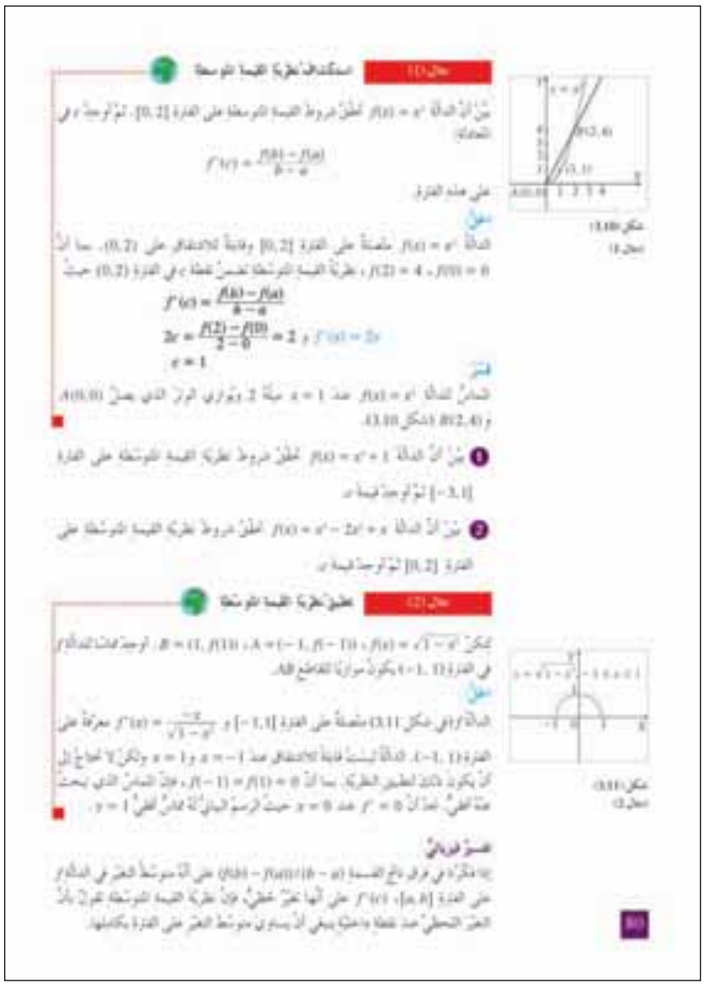
$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab}{2}$$

– مساحة المثلثين المظللين: $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$

– مساحة المثلث غير المظلل: $\frac{x^2}{2}$

– المعادلة: $ab + \frac{x^2}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab}{2}$

– إذًا: $x^2 = a^2 + b^2$



10–إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 2–3

(1) الدالة $f(x) = x^3 + 1$ متصلة على الفترة $[-3,1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-3,1)$ حيث: $f'(x) = 3x^2$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{2 - (-26)}{4} = 7$$

$$3c^2 = 7$$

$$c = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

(2) الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ متصلة على الفترة $[0,2]$ وقابلة للاشتقاق على $(0,2)$ حيث:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

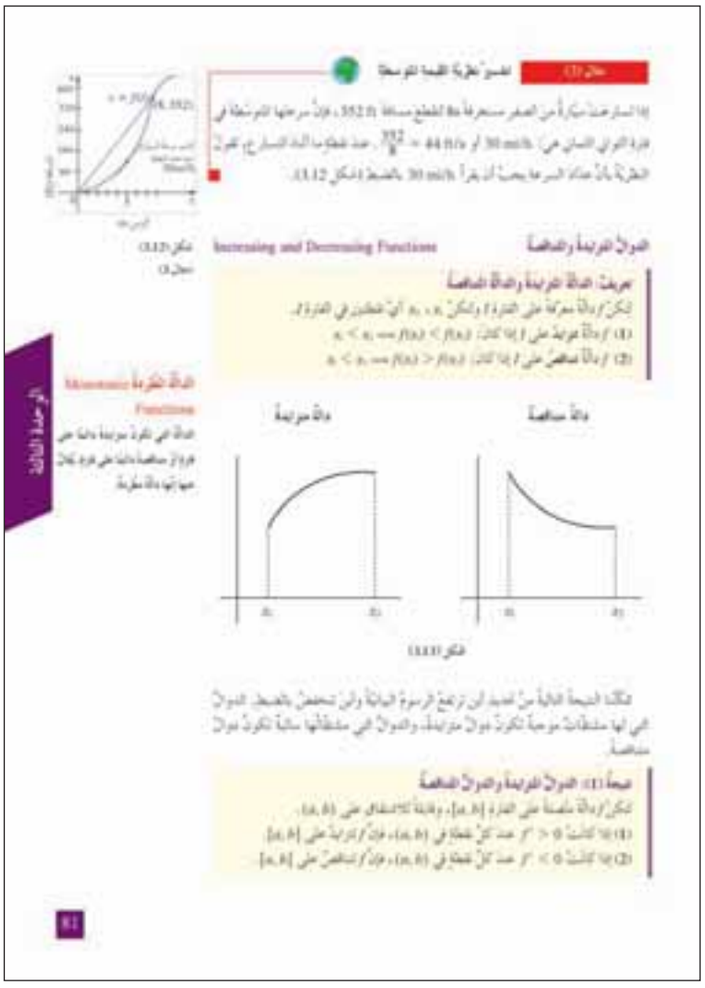
$$3c^2 - 4c + 1 = 1$$

$$c = 0, \quad c = \frac{4}{3}$$

$$\therefore c = \frac{4}{3}$$

(3) (a) تتزايد f على الفترة $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ وتتناقص على $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right]$

(b) تتزايد g على الفترة $(-\infty, -1]$ والفترة $[1, +\infty)$ وتتناقص على الفترة $[-1,1]$.



(1) $(-3, 3)$

(2) $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

(3) مجال f: $(-\infty, \infty)$ ومجال f': $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ أو $x \neq 0$

(4) مجال f: $x \neq 2$

مجال f' : $x \neq 2$

(5) مجال f: $(-\infty, +\infty)$

مجال f' : $x \neq 0$

(6) $f'(x) = 2x - 3\,;\, f''(x) = 2$

(7) $f'(x) = -2\sin 2x\,;\, f''(x) = -4\cos 2x$

(8) $f'(x) = \dfrac{11}{(3x-2)^2}\,;\, f''(x) = \dfrac{-66}{(3x-2)^3}$

(9) $f'(x) = 3\,;\, f''(x) = 0$

3–3 ربط المشتقة الأولي f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على استخدام اختبارات المشتقة الأولى والثانية لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة.

– يكون الطلاب قادرين على تحديد تقعر منحنى الدالة وتعيين نقاط الانقلاب بدراسة المشتقة الثانية.

– يكون الطلاب قادرين على دراسة سلوك الدالة f (رسم منحنى تقريبي) باستخدام المعلومات عن f' .

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

اختبار القيم القصوى المحلية، تقعر المنحنى، نقاط انقلاب، دراسة منحنى f من إشارة f' .

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(أ) أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$

(ب) أكمل الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$							
$f''(x)$							
$f(x)$							

(جـ) اسأل الطلاب عن ملاحظاتهم بالنسبة إلى إشارات $f'(x)$ و $f''(x)$ وتأثيرها على تغير $f(x)$.

(د) اطلب إليهم رسم النقاط $(x, f(x))$ من الجدول في مستوى إحداثي.

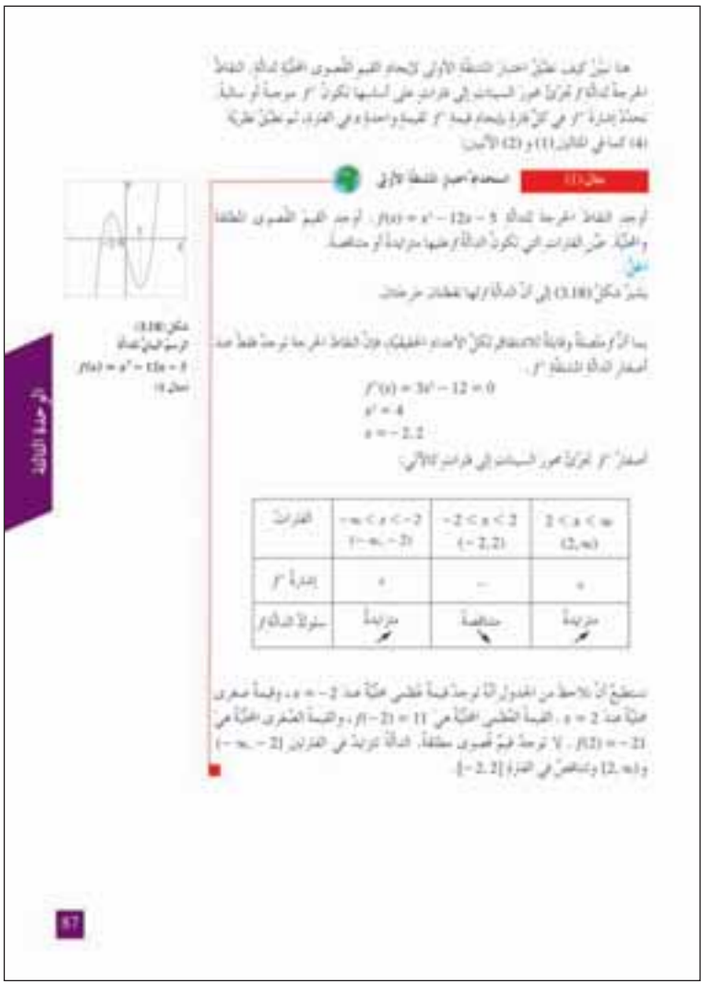
(هـ) ناقش الربط بين $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f(x)$.

5– التدريس:

يمكنك التهيئة لنظرية (4)، اختبار المشتقة الأولى، عن طريق تقديم عدة رسوم بيانية، وجَعْل الطلاب يناقشون المشتقات، وعلاقتها بالقيم القصوى للدالة.

يقدم هذا الدرس العديد من الاختبارات الأساسية لتحليل دالة، ورسم مخطط لشكلها البياني. وهذه الاختبارات هي: اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية (نظرية 4) واختبار التقعر واختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية (نظرية 5).

على الرغم من أن استخدام هذه الاختبارات لرسم منحنيات الدوال، لم يعد التأكيد عليه حديثًا بسبب التقنيات، إلا أنه أمر حيوي أن يفهم الطلاب الترابط بين المشتقتين الأولى والثانية ومنحنى الدالة. تحليل المشتقتين الأولى والثانية يؤسس لكل



السِّمات المهمة التي يشير إليها منحنى مرسوم، ويمكن أن يؤكد أن نافذة العرض المختارة لا تستبعد سِمات مهمة من منحنى الدالة.

سوف يحتاج الطلاب إلى أن يتعلموا استخدام أحكامهم الشخصية لتقرير أي الاختبارات يطبقونها لإيجاد القيم القصوى المحلية لدالة. في بعض الأحيان تتطلب y'' عملًا مطولًا لإيجادها جبريًّا. قد يكون اختبار المشتقة الأولى أسهل من اختبار المشتقة الثانية. شجِّع الطلاب على كتابة عبارات تصف ما يصلون إليه.

6- الربط:

لا يوجد.

7- أخطاء شائعة:

من المهم أن يفهم الطلاب أن الشرط $f'(c) = 0$ لا يضمن أن f لها قيمة قصوى محلية عند $(c, f(c))$. وبالمثل، يعيِّن بعض الطلاب أي نقاط تكون عندها $f''(x) = 0$ كنقاط انقلاب. ذكِّر الطلاب أن تغيرًا في التقعر ينبغي أن يكون موجودًا لكي يكون للدالة نقطة انقلاب.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين A-2، A-4، A-6، A-10. تحقق من عمل الطلاب ثم تأكد من فهمهم لتأثير إشارة f' و f'' على الدالة f.

9- مسألة اليوم:

أراد أحد التجّار طبع لوحة إعلانات فاستخدم قطعة كرتون مستطيلة مساحتها $1\,m^2$ وأبعادها x و y بالسنتيمتر، على أن تكون الهوامش من الأعلى والأسفل $8\,cm$ ومن الجوانب $5\,cm$. يريد معرفة قيم x و y كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

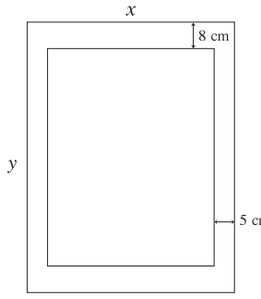
(أ) أوجد قيمة المساحة المطبوعة بدلالة x فقط.

$$A(x) = -16x - \frac{100\,000}{x} + 10\,160$$

(ب) ما قيم x و y المناظرة للمساحة الكبرى المطبوعة؟

$x \approx 80\,cm$

$y \approx 125\,cm$



10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3-3

(1) (أ) النقاط الحرجة لـ f: -1 و 3

النقاط الحرجة لـ g: 1، -1

(ب) f: عظمى محلية: -6 عند $x = -1$

قيمة صغرى محلية: 2 عند $x = 3$

g: قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x=-1$.

قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x=1$.

(جـ) f: متزايدة على $[3,\infty)$ وعلى $(-\infty,-1)$.
متناقصة على $(1,3]$ وعلى $[-1,1]$.

(2) مقعرة لأسفل على الفترة $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

مقعرة لأعلى على الفترة $\left(\frac{2}{3},\infty\right)$.

(3) (أ) $(1,3)$

(ب) $y=-3x+6$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 4–3

(1) لا يوجد

(2) عظمى محلية $(-2,17)$

صغرى محلية $(1,-10)$

(3) $\frac{200\pi}{3}\ \text{cm}^3$

(4) $r\approx 4.01\ \text{cm}\ ;\ h\approx 19.82\ \text{cm}$

أو

$r\approx 7.13\ \text{cm}\ ;\ h\approx 6.26\ \text{cm}$

(5) $-\sin\alpha$

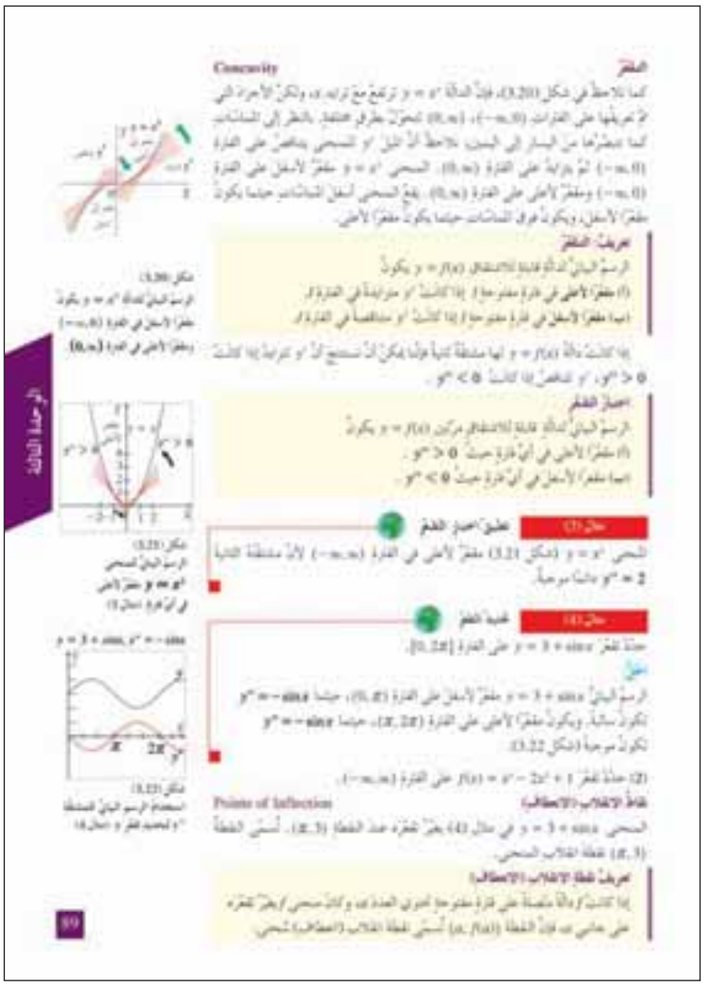
(6) $\cos\alpha$

(7) $\sin\alpha$

(8) $-\cos\alpha$

(9) $x=1$ و $y=\sqrt{3}$ أو $x=-1$ و $y=-\sqrt{3}$

(10) $x=0$ و $y=3$ أو $x=-\frac{24}{13}$ و $y=\frac{15}{13}$



3–4 النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى)

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على حل مسائل تطبيقية تتضمن إيجاد قيم صغرى وعظمى للدوال.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

لا يوجد.

3– الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، ورق مقوى، حاسوب.

4– التمهيد:

اسأل الطلاب ما يلي:

(أ) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ و $b > 0$ ومجموعهما $a + b = 20$ فمتى يكون حاصل ضربهما ab أكبر عدد ممكن؟

$a = b = 10 \Rightarrow ab = 100$

(ب) إذا كان لدينا عددان $a > 0$ و $b > 0$ وحاصل ضربهما $ab = 36$ فمتى يكون حاصل جمعهما أصغر عدد ممكن؟

$a = b = 6 \Rightarrow a + b = 12$

5– التدريس:

قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بأن تطلب إلى الطلاب أن يأتوا بمواقف يريدون فيها أن يوجدوا قيمًا عظمى أو صغرى لدالة. كن مستعدًّا لإعطاء العديد من الأمثلة في حالة لم يقدم الطلاب أي مواقف.

تقليديًّا، يجد الطلاب صعوبة مع مسائل الأوْفَقِية، خاصة بتكوين الدالة التي يكون مطلوبًا إيجاد قيمها القصوى (أصغر أو أكبر قيمة)، وتحديد المجال المناسب لسياق المسألة. في هذا الصدد، أكِّد على «إستراتيجية الخطوات لحل مسائل القيم العظمى والصغرى»، والمعطاة في صفحة 96.

ملاحظات على الأمثلة:

– في مثال (5)، من المهم ملاحظة أن المجال المناسب للمسألة هو الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. يكون أمرًا تنويريًّا للطلاب مناقشة ماذا يحدث عندما يكون الدخل $r \to 0^+$ وعندما يكون الدخل $r \to \infty$.

– لاحظ أنه يوجد طريقة بديلة لحل مثال (6) هي إيجاد قانون صريح للتكلفة المتوسطة ثم إيجاد أقل قيمة لهذه الدالة. يكون مفيدًا للطلاب استخدام الطريقتين للحل والتحقق من أن استخدام أيّ من الطريقتين يعطي النتيجة نفسها.

6- الربط:

تعطى التكلفة الكلية لإنتاج ما بالدالة: $C(x) = 100x^2 + 1300x + 1000$ حيث x تمثل ألف وحدة إنتاج و $C(x)$ تعطى بآلاف الدراهم. تباع كل وحدة إنتاج بثمن 2000 درهم.

(أ) إذا كان x عدد الوحدات المباعة، فأوجد بدلالة x دالة الربح: $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = 2000x - 100x^2 - 1300x - 1000$

$P(x) = -100x^2 + 700x - 1000$

(ب) أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح.

$P'(x) = -200x + 700$

$P''(x) = -200 < 0$

يتحقق أكبر ربح عند: $P'(x) = 0$ أي 3500 وحدة إنتاج.

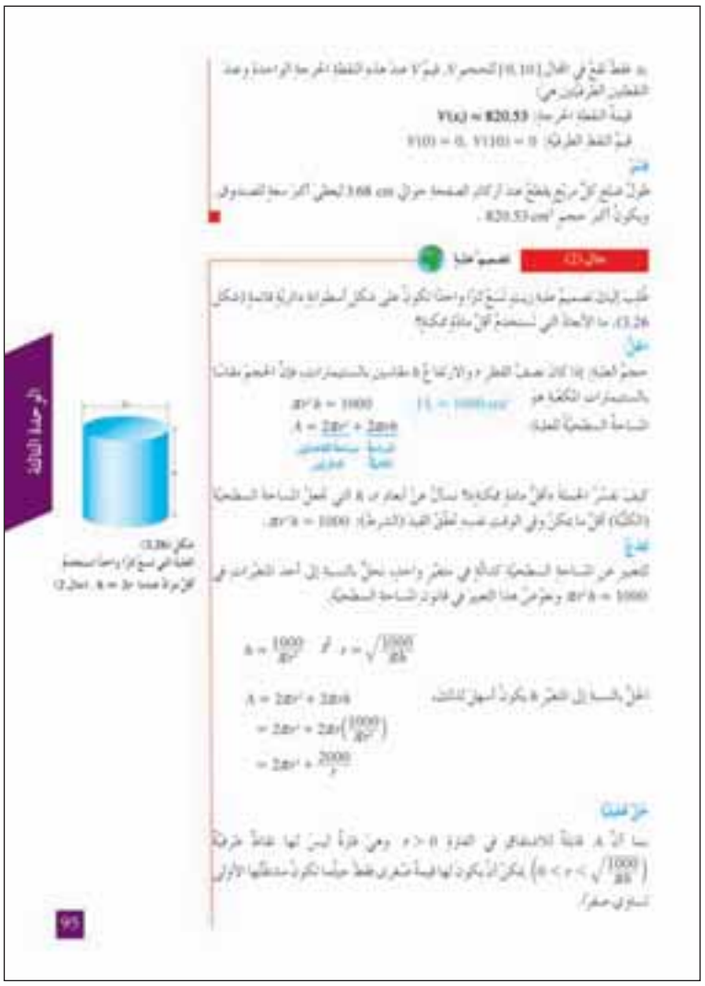
7- أخطاء شائعة:

في مسائل الأَوْفَقِيَّة، قد يتغاضى الطلاب عن نقاط النهاية كنقاط ممكنة لقيم أوفقية، أو يجدون حلولًا خارج مجال المتغير موضع الدراسة. عند الرسم البياني لمسائل أوفقية تتضمن دوال مثلثية، غالبًا ما يتم التغاضي عن حلول بديلة لكل من:

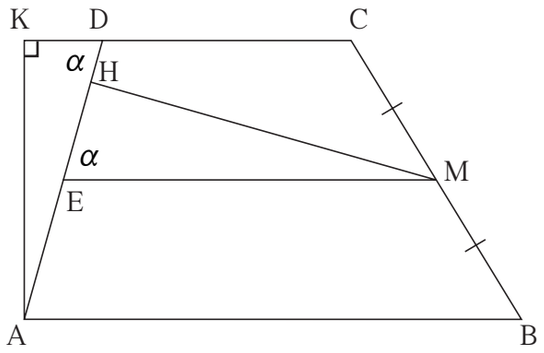
$f'(x) = 0$ أو $f''(x) = 0$. الطبيعة الدورية للدوال المثلثية لا بد من أن تكون دومًا موضع الاعتبار في هذه المسائل، وذلك فيما عدا بعض الحالات التي تكون فيها الشروط الفيزيائية للمسألة مقيِّدة للمجال .

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين : A-2، A-7، A-9، A-11. تحقق من عمل الطلاب. تأكد من فهمهم لتطبيق الدوال على القيم العظمى والصغرى لنماذج من الواقع.



9- مسألة اليوم:



أثبت أن مساحة شبه المنحرف ABCD تساوي: $AD \times MH$ وحدة مربعة.

مساحة $(ABCD)$: $= \dfrac{(AB + CD)\,AK}{2}$

$$ME = \frac{AB + CD}{2}$$

إذًا:

مساحة $(ABCD) = ME \times AK$

ولكن $\sin\alpha = \dfrac{AK}{AD} = \dfrac{MH}{ME}$

وبالتالي:

مساحة $ABCD = AD \times MH$

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 4-3

(1) (أ) المستوى $x = 6$ (600 جهاز) يحقق قيمة عظمى للربح تساوي 16 000 درهم.

(ب) الربح يساوي صفرًا إذا كان $b(x) = 0$.

نحصل على $x = 2$ (200 جهاز) أو $x = 10$ (1000 جهاز).

(2) التكلفة المتوسطة

$$\frac{C(x)}{x} = x + 1 + \frac{9}{x}$$

$$C_M(x) = x + 1 + \frac{9}{x}$$

$$C'_M(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

القيمة الصغرى للتكلفة المتوسطة تكون عند $x = 3$ أي عند الإنتاج 300 وحدة. وتكون قيمة التكلفة المتوسطة 700 درهم.

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 5–3

(1) $AB = \sqrt{74}$

(2) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$

(3) $\dfrac{1-2y}{2x+2y-1}$

(4) $\dfrac{-(y+\sin y)}{x+x\cos y}$

(5) $2x\cos^2 y$

(6) $2x\cos(x^2+1)$

(7) $\dfrac{1-\cos x-(x+1)\sin x}{(x+1)^2}$

(8) $x^4-3x^2-4=0\,;\,x=\pm 2$

(9) $2x^3-5x^2-x+6=0\,;$

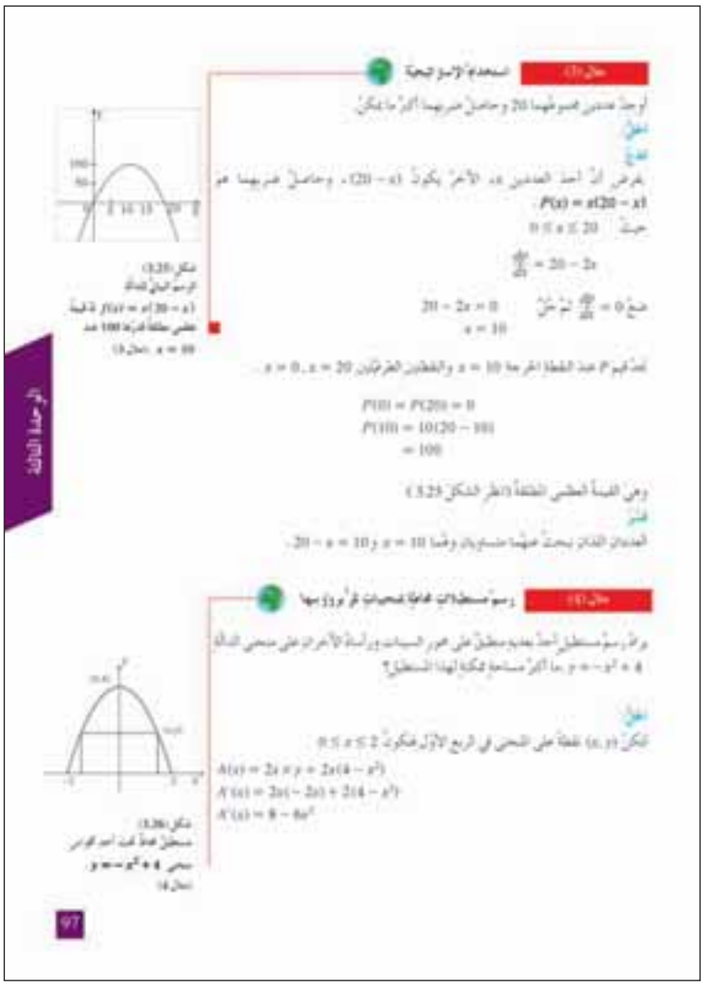
$x=-1\,,\,x=2\,,\,x=\dfrac{3}{2}$

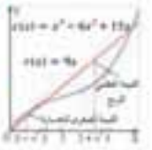
(10) $y=-6x+5$

(11) $y=-8x+4$

(12) (أ) $x=\dfrac{5}{6}$

(ب) $x=\dfrac{1}{2}$





شكل (3.29):
منحنيات التكلفة والدخل لكل (x)

مثال (3) ربح الأقصى (القيمة العظمى لربح)

افترض أنّ $r(x) = 9x$ و $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$، حيث x تمثل آلاف وحدات المنتج. هل توجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى لربح؟ إذا كان كذلك، ما هو؟

الحل

لاحظ أنّ $r'(x) = 9$ و $c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$.

$$3x^2 - 12x + 15 = 9 \quad \text{تساوي } c'(x) = r'(x)$$
$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

حلّ المعادلة التربيعية هنا:

$$x = \frac{12 - \sqrt{72}}{6} = 2 - \sqrt{2} = 0.586$$
$$x = \frac{12 + \sqrt{72}}{6} = 2 + \sqrt{2} = 3.414$$

$$P(x) = r(x) - c(x)$$
$$= 6x^2 - x^3 - 6x$$
$$P(x_1) = -3.511$$
$$P(x_2) = 9.657$$

ومنه نجد أنّ أكبر ربح يحدث عند $x_2 = 3.414$ وأكبر خسارة تحدث عند $x_1 = 0.586$.

مستويات الإنتاج لتحقيق الربح الأعظم تحدث عند إنتاج **3.414** ألف وحدة، والخسارة تحدث عند إنتاج **0.586** ألف وحدة.

الرسم البياني في شكل (3.29) يبيّن أنّ الربح الأقصى يحدث عند $x = 3.414$ تقريبًا، وأنّ الخسارة الكبرى تحدث عند $x = 0.586$ تقريبًا.

---

1. افترض أنّ $A(x) = -x^3 + 12x - 20$ تمثل الربح بآلاف الدراهم لبيع x (بالمئات) من أجهزة كهربائية على الفترة $[0,15]$.
   (أ) هل يوجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى لربح؟ إذا كان كذلك، فما هو؟
   (ب) ما مستوى الإنتاج الذي يكون الربح بمستوى صفر؟

طريقة أخرى للبحث عن مستويات الإنتاج الأفضل هي البحث عن المستويات التي تجعل التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن بالنسبة إلى الوحدات المنتجة. نظرية (7) تفيدنا في إيجاد ذلك.

نظرية (7): تحقيق أدنى قيمة للتكلفة **Minimizing Average Cost**

مستوى التكلفة (x) وجد الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن هو المستوى الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية.

2. يمكن $C(x) = x^3 + x + 9$ التكلفة (بالدينار الأردني) لإنتاج x (بالمئات) من وحدات معينة. هل هناك مستوى إنتاج يحقق التكلفة المتوسطة أقل قيمة؟ إذا كان كذلك، فما هي؟

تمارين إضافية للقسم 3-4

• في التمرينين (1، 2): أوجد المسافة بين النقطتين A و B.

1. $A(0.5), B(7.0)$
2. $A(0,a), B(b,0)$

• في التمارين (3، 5): أوجد $\frac{dy}{dx}$.

3. $2xy + y^2 = x + y$
4. $x^2 = \tan y$
5. $y = \sin(x^2 + 1)$

• في التمرينين (6، 7): حلّ المعادلة جبريًا.

6. $x^3 - 3x^2 - 4 = 0$
7. $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$

• في التمرينين (8، 9): لتكن $f(x) = x^3 - 6x + 5$. أكمل معادلة المماس للدالة f عند $x = c$.

8. $c = 0$
9. $c = -1$

10. أوجد أين يقطع خط المماس محور السينات:
    (أ) في التمرين (8) (ب) في التمرين (9)

3–5 المعدلات المرتبطة

1– الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على حل مسائل في المعدلات المرتبطة.

2– المفردات والمفاهيم الجديدة:

معادلات المعدلات المرتبطة، إستراتيجية الحل، محاكاة الحركة المرتبطة.

3– الأدوات الوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4– التمهيد:

لنأخذ الدالة البارامترية f المعرفة كما يلي:

$$f:\begin{cases} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$$

(أ) أوجد نقطة على منحنى هذه الدالة عند $t = 0$. $(-2, 1)$

(ب) أوجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}t$

(ج) أوجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4}{9}$

(د) أوجد y بدلالة x ثم احسب $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{9} + 1; \frac{dy}{dx} = \frac{2x+4}{9}$$

5–التدريس:

توجد طريقة جيدة للبداية في هذا الدرس وهي مراجعة الموضوعات الخاصة بقاعدة السلسلة، كما تطبق على المنحنيات البارامترية وعلى الاشتقاق الضمني. تشكل هذه الموضوعات صعوبة بالنسبة إلى معظم الطلاب، ولكن التمكن من هذا الموضوع أمر أساسي للنجاح في حل مسائل المعدلات المرتبطة حيثما لا توجد علاقة مباشرة بين الكميتين.

تقدم إستراتيجية الخطوات لحل مسائل المعدلات المرتبطة في صفحة (103) إلى الطلاب عملية خطوة بخطوة يتبعونها لكي يصلوا إلى النتيجة المرغوبة. ينبغي أن يكون الطلاب على وعي للطرق المناسبة للدعم البياني (الرسم)، كما في استكشاف (1).

ينهي استكشاف (1) الدرس ببيان كيف أن نظامًا بارامتريًّا يمكن أن يحاكي حركة جسم عندما يمكن التعبير عن تلك الحركة كدالة بالنسبة إلى الزمن.

ملاحظات على الأمثلة:

■ الأمثلة (4–2) مصممة لعرض إستراتيجية الخطوات الست في حل مسائل المعدلات المرتبطة.

6– الربط:

خزان ماء على شكل نصف كرة نصف قطرها $r = 13\text{ m}$. يعطى حجم الماء في هذا الخزان بعمق y_m بالقاعدة: $V = \frac{\pi}{3}(3r - y)y^2$

إذا تدفق الماء من الخزان بمعدل $6\text{ m}^3/\text{min}$ عندما كان ارتفاع الماء $y = 8\text{ m}$، فما معدل تغير مستوى ارتفاع الماء في الخزان؟

لدينا: $\frac{dV}{dt} = -6\text{ m}^3/\text{min}$ يجب إيجاد $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dV}{dt} = (26\pi y - \pi y^2)\frac{dy}{dt}$$

وبالتالي فإنّ معدل تغير مستوى ارتفاع الماء هو:

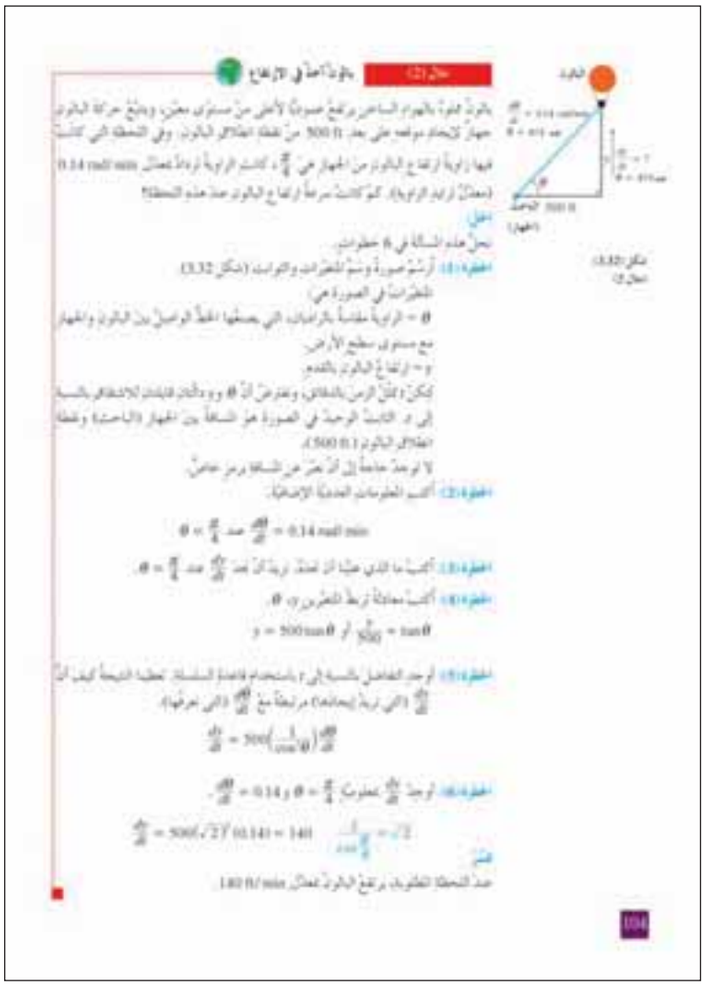
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{24\pi} \approx -1.326\text{ cm/min}$$

7– أخطاء شائعة:

أكثر أخطاء الطلاب شيوعًا في حل مسائل المعدلات المرتبطة، هي التقييم أو التعويض المبكران (قبل الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن) ما يجعل من المستحيل الحصول على المشتقات المناسبة. أكِّد على أن التقييم هو الخطوة النهائية في إستراتيجية الخطوات لحل مسائل المعدلات المرتبطة.

8– التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: A–2، A–4، A–5، A–8. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا معنى المعدلات المرتبطة وتأثيرها على تطبيقات حياتية.



9– مسألة اليوم:

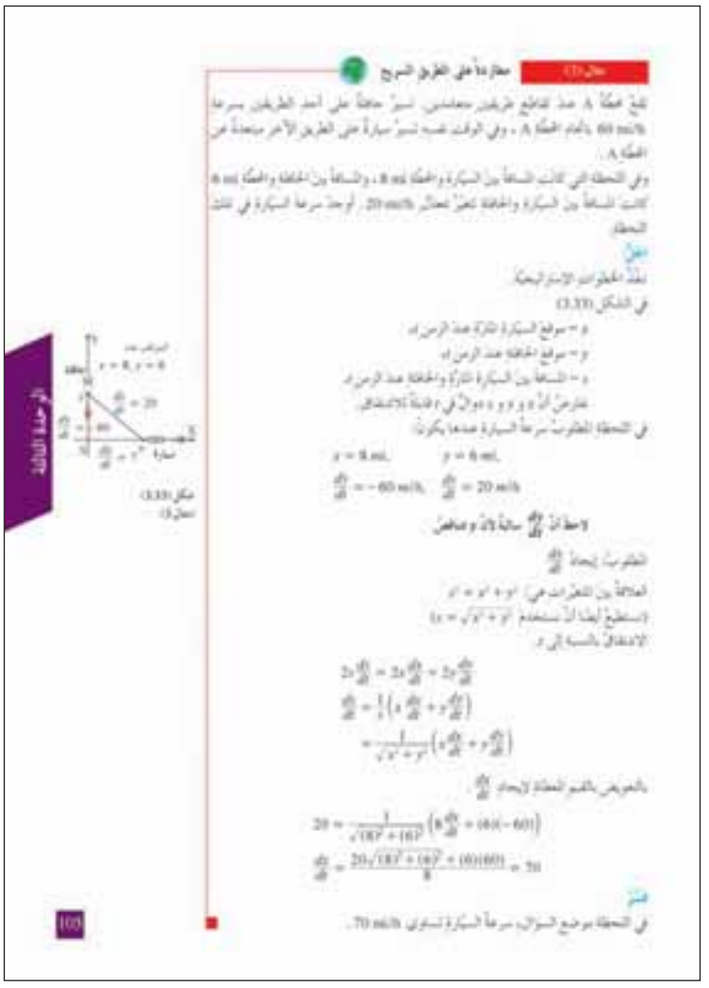
في أول يناير من عام 1997 ، كان عدد سكان تجمع في الريف 3000 شخص. على افتراض أن العدد يتناقص سنويًّا 4% ؛

(أ) كم كان عدد السكان في أول يناير من عام 1999 ؟

2765

(ب) بعد كم سنة سيصبح عدد السكان أقل من 2000 شخص؟

بعد 10 سنوات من عام 1997 أي عام 2007



اختبار الوحدة

إجابات اختبار الوحدة الثالثة

(1) (أ) قيمة صغرى محلية: -2 عند $x=-2$

قيمة عظمى محلية: 2 عند $x=0$

(ب) $(-2,0)$

(جـ) $(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$

(د) $(-\infty,-1)$

(هـ) $(-1,\infty)$

(2) (أ) $[-\infty,-3],[0,3]$

(ب) $[-3,0],[3,\infty]$

(جـ) $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

(د) $(-\infty,-\sqrt{3}),(\sqrt{3},\infty)$

(هـ) قيمة عظمى محلية 92 عند $x=\pm 3$

قيمة صغرى محلية 11 عند $x=0$

(و) $(-\sqrt{3},56),(\sqrt{3},56)$

(3) (أ) لا يوجد

(ب) 4

(جـ) عند $x=-2$ و $x=2$

(4) $g(x)=2x^3-47$

(5) (أ) حوالي $2.063\text{ cm}\times 13.873\text{ cm}\times 5.873\text{ cm}$

(ب) حوالي 168.126 cm^3

(6) (أ) $a=-50$

(ب) $a=-24$

(7) (ب)

(8) يتناقص بمعدل 0.1123 قدم/دقيقة

(9) $\dfrac{145}{\sqrt{13}}\simeq 40.215\text{ m/s}$

7 افترض أن ثمن البيع بالدرهم لكمية x من الدراجات هو $p(x) = 90x$ وثمن الإنتاج لهذه الدراجات هو $c(x) = 0.0002x^3 - 0.1x^2 + 20x + 6000$.
أوجد مستوى الإنتاج الذي يُعطي القيمة العظمى لربح. عشر اختيارك
(أ) 28 دراجة
(ب) 547 دراجة
(ج) 586 دراجة
(د) 803 دراجة
(هـ) غير موجود

8 حرّك بدر على شكل هروج قاعدته دائرة نصف قطرها 5.0 وارتفاعه 12 ft. تكوّن الهروج بتلك على ارتفاع 7ft. يتدفق الماء من الهروج إلى الهروج بمعدل $3.0\ ft^3$ في الدقيقة. أوجد معدل تغير العمق للماء في الهروج، بين الفترات التي تُعهد.
(إرشاد: حجم الهروج هو: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ حيث R هي مساحة القاعدة و h ارتفاع الهروج.)

9 تبحر مركبتان منعطفتان عن هوائيا في الوقت نفسه بمساران زاويا بينهما قياسها $90°$. تبحر المركبة الأولى بسرعة 165 m عن الهوائيا وتبحر بمعدل سرعة يساوي 25 m/s. أما المركبة الثانية فتبحر بسرعة 110 m عن الهوائيا وتبحر بمعدل سرعة يساوي 35 m/s. بالثانية. أوجد معدل تغير المسافة بين المركبتين.

نظرية (3): نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على كل فترة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة تنتمي لداخلها (a,b) فإنه يوجد نقطة واحدة على الأقل c في (a,b) يكون عندها
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تعريف: الدالة المتزايدة والدالة المتناقصة
Increasing Function, Decreasing Function
ليكن f دالة معرفة على الفترة I وليكن x_1 و x_2 أي نقطتين في الفترة I.
(1) f دالة متزايدة على I إذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ متى $x_1 < x_2$.
(2) f دالة متناقصة على I إذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ متى $x_1 < x_2$.

مبرهنة (1): الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة
ليكن f دالة متصلة على الفترة $[a,b]$، وقابلة للاشتقاق على (a,b).
(1) إذا كانت $f' > 0$ عند كل نقطة في (a,b)، فإن f تزايدية على $[a,b]$.
(2) إذا كانت $f' < 0$ عند كل نقطة في (a,b)، فإن f تناقص على $[a,b]$.

مبرهنة (2): الدوال التي مشتقاتها $f' = 0$ هي دوال ثابتة
إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $f(x) = C$ لكل x في I.

مبرهنة (3): الدوال التي لها المشتقة عينها تختلف بمقدار ثابت
إذا كانت $g'(x) = f'(x)$ عند أي نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $g(x) = f(x) + C$ لكل x في I.

تعريف: معكوس المشتقة
Antiderivative
الدالة $F(x)$ **معكوس المشتقة** لدالة $f(x)$ إذا كان $F'(x) = f(x)$ لكل x في مجال f.
يُسمى عملية مكتسبة أسمى **مكس العامل (مكس الاشتقاق)**.

نظرية (4): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية
ليكن الاختبار الآتي على دالة متصلة $f(x)$
عند أي نقطة حرجة c
(1) إذا كانت المشتقة f' تغير إشارتها من الموجب إلى السالب عند c ($f' > 0$، عندما $x < c$، و $f' < 0$، عندما $x > c$)، فإن الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
(2) إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند c ($f' < 0$ عندما $x < c$، و $f' > 0$ عندما $x > c$)، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c.
(3) إذا لم تغير إشارة f' عند c (f' يكون لها الإشارة عينها على جانبي c) فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلية عند c.

عند نقطة فترة يسار c
إذا كان $f' > 0$ (أو $f' < 0$) لكل $x < c$، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية (أو قيمة صغرى محلية) عند النقطة c.

عند نقطة فترة يمين c
إذا كانت $f' > 0$ (أو $f' < 0$) لكل $x > c$، فإن الدالة f يكون لها قيمة صغرى محلية (أو قيمة عظمى محلية) عند c.

تعريف: التقعر Concavity
لرسم البياني لدالة قابلة للاشتقاق $f(x)$ و يكون:
(أ) **مقعراً لأعلى** في فترة مفتوحة I إذا كانت f' متزايدة في الفترة I.
(ب) **مقعراً لأسفل** في فترة مفتوحة I إذا كانت f' متناقصة في الفترة I.

تعريف: نقطة الانقلاب
النقطة التي عندها يكون الرسم البياني لدالة f خطاً مماساً، وحيث يتغير تقعر المنحنى هي نقطة انقلاب.

نظرية (5): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية
(1) إذا كانت $f'(c) = 0$، $f''(c) < 0$، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$.
(2) إذا كانت $f'(c) = 0$، $f''(c) > 0$، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$.

نظرية (6): القيمة العظمى للربح Maximum Profit
القيمة العظمى للربح (إذا وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية.

نظرية (7): تحقيق أقل قيمة لتكلفة Minimizing Average Cost
مستوى التكلفة (إذا وُجد) الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن هو المستوى الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية.