



مركز تطوير المناهج والمواد التعليمية

وزارة التربية والتعليم

12 الصف الثاني عشر

علمي

كتاب المعلم
الجزء الأول

الرياضيات

لجنة مواءمة كتب الرياضيات – سلسلة الفراشة:

1. أحمد علي أبو يوسف.

2. حسام أسعد البكري.

3. عماد جريس البخيت.

4. مؤنس عبد الحليم محمد.

5. يوسف شاهين محمد.

مَكْتَبَةُ لِبْنَاتِ نَاشِرُونَ

جميع الحقوق محفوظة: لا يجوز نشر أي جزء من هذا الكتاب أو تصويره
أو تخزينه أو تسجيله بأي وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

4	مقدمة دليل المعلم
5	ماذا عن كتاب الطالب؟
6	الرياضيات (الجزء 1) (منظومة المحتوى)
7	أسس تربوية عامة في تدريس الرياضيات
8	أهداف تدريس الرياضيات
9	إستراتيجيات عامة للتدريس
10	وسائط تعليمية عامة
11	محتوى الجزء الأول للصف الثاني عشر
12	مصفوفة تحليل المحتوى
21	مصفوفة المدى والتتابع
22	أهداف خاصة لتعليم الوحدات الثلاث في الجزء الأول
24	الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
26	معدلات التغير والنهايات
31	الاتصال
34	معدلات التغير وخطوط المماس
36	اختبار الوحدة
40	الوحدة الثانية: المشتقات
42	مشتقة دالة
45	قابلية الاشتقاق (التفاضل)
48	قواعد الاشتقاق
52	مشتقات الدوال المثلثية
55	قاعدة السلسلة
60	اختبار الوحدة
62	الوحدة الثالثة: تطبيقات المشتقات/التفاضل
64	القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال
67	الدوال المتزايدة والمتناقصة
71	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' . منحنى الدالة f
74	النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى)
79	المعدلات المرتبطة
82	اختبار الوحدة

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب لمعلمي مادة الرياضيات للصف الثاني عشر (الثالث من مرحلة التعليم الثانوي)، أن نوّكد أن هذا الكتاب قد تمّ إعداده ليكون أداة مساعدة، يستنير بها المعلم في تحسين أدائه، وجعل تدريسه عملية وظيفية تستند في المقام الأول إلى أسس تربوية سليمة، في ضوء نظريات التعلم الحديثة، بحيث يكون دور المعلم ميسراً لعملية التعلم، لإعداد قادة المستقبل من الشباب في عصر العلم والتقنية، اللذين أصبحا من ضرورات الحياة للإنسان المعاصر.

ومن هذا المنطلق كان من الضروري؛ بل من المحتّم؛ لمعلم الرياضيات فهم فلسفة المقرر الذي يعالجه، والذي وضع في ضوء المناهج المطورة التي تضعها وزارة التربية والتعليم، والتي تهتم بالآتي:

(1) تأكيد مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة، من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمي، وأن يمارسوا التعلم المتمزج بالمتعة والتشويق؛ وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات، وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتي، والعمل التعاوني بروح الفريق، والمناقشة والحوار وتقبّل آراء الآخرين، والموضوعية في إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

(2) تقديم رؤية شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتقنية والمجتمع (STS) science, technology, and society تعكس دور التقدّم العلمي في تنمية المجتمع المحلي، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب للتصرّف الواعي والفعال حيال استخدام الأدوات التقنية.

(3) التركيز على تبصير الطلاب بالمفاهيم والمبادئ الرياضية المتعلقة بالأنشطة الحياتية، وتنمية اتجاهات إيجابية للطلاب تجاه الرياضيات ودراساتها، لتقدير إيجابياتها كأداة فاعلة في الحياة.

(4) تزويد الطلاب بثقافة شاملة مبنية على رؤية واضحة داخل الإطار البيئي الذي يعيشون فيه، من خلال تنمية الاتجاهات الإيجابية لحسن استخدام الموارد والإمكانات المتاحة.

(5) تنمية وتعميق الانتماء للوطن بإظهار دور الدولة فيما تقدّمه من خدمات تعود بالخير والنفع في جميع المناحي الحياتية.

ماذا عن كتاب الطالب؟

- 1- يتفق محتوى الكتاب مع جميع الأهداف العامة لتدريس الرياضيات، والأهداف الخاصة لمقرر الصف الثاني عشر، ويظهر ما بين محتوى وحداته من ترابط وتكامل.
- 2- استهلال كل وحدة من وحدات الكتاب بافتتاحية تحوي:
 - تهيئة للتشويق وتكوين دافعية لدى الطالب، وذلك لاستقراء واستكشاف محتوى الوحدة.
 - عرضاً لدروس الوحدة.
 - مجموعة من الأنشطة المتنوعة، تتضمن أنشطة استكشافية وأخرى لربط الخبرات السابقة للطلاب بموضوعات المقرر.
- 3- يبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية تحتوى الدرس.
- 4- ينتهي كل درس من كل وحدة بمجموعة من التمارين والتدريبات التي تنتقل من الاستفهام المباشر إلى التفكير المتعمق.
- 5- يتضمن محتوى كل وحدة مجموعة من المعالم المتميزة، والمرتبطة ارتباطاً وثيقاً بموضوعات الوحدة تتضمن أنشطة تربوية من مثل: (تطبيقات حياتية، مسألة للتفكير، دعنا نفكر ونتناقش، عمل تعاوني، تفكير ناقد).
- 6- تنتهي كل وحدة باختبار يشتمل على العديد من الأسئلة ويتضمن أسئلة موضوعية بنوعياتها المختلفة، والمقالية بنوعياتها، وذات الإجابات القصيرة، كما روعي ما طرأ من تحديث وتطوير في مجال بناء الاختبارات التقييمية.
- 7- يتضمن الكتاب الأشكال والرسوم التي جاءت مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بموضوعات الكتاب، وقد تمّ توظيفها بشكل يمكن الطالب من إدراك العلاقات بين المتغيرات، من خلال عمليات التفسير والتحليل والاستنتاج.

دور الكتاب للمعلم:

إنّ تناوّلنا لكل وحدة من الوحدات المقررة على حدة في هذا الكتاب من حيث الأهداف والخطّة الزمنية والمعلم والوسائط التعليمية وطرق تدريس المحتوى والتقييم - ليس الهدف منه وضع قيدٍ على المعلم، بحيث نحد من حريته في تناول ومعالجة كل وحدة أو إلزامه بأسلوب معين، بل هو محاولة من جانبنا نقدّمها للمعلم، كي تنير له الطريق وتمهّد السبيل لتحقيق الأهداف المنشودة، في الوقت الذي نقدّر فيه أنّ لكل معلّم شخصيّة المميّزة ومهاراته وإبداعاته الخاصة به.

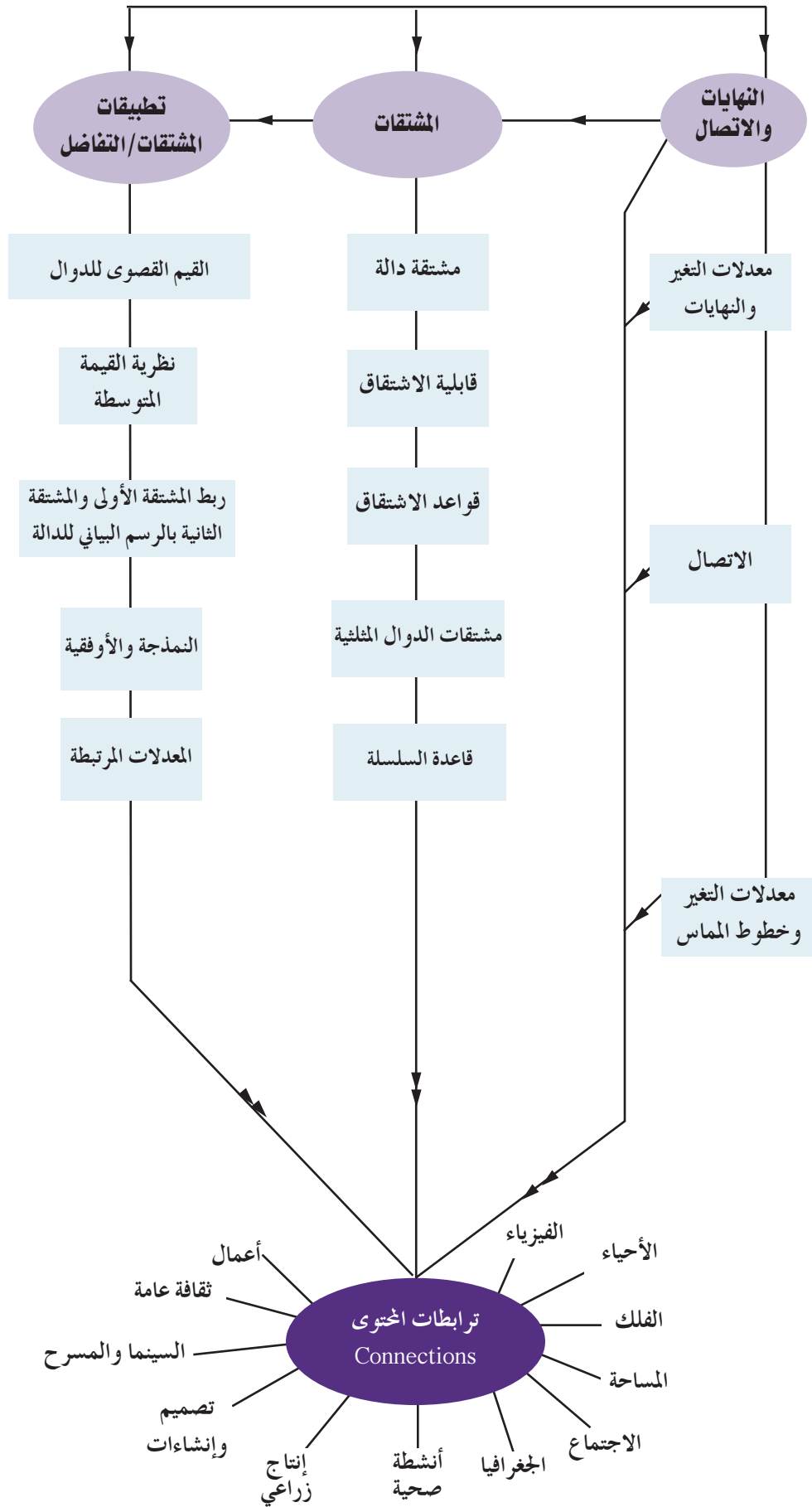
وأخيراً... فإننا نتمنى أن يكون هذا الدليل في مستوى طموحات زملائنا المعلمين، وأن يجدوا فيه عوناً لهم على أداء رسالتهم التربوية النبيلة حتى تتحقق الأهداف المرجوة.

والله من وراء القصد وهو يهدي إلى سواء السبيل.

ماذا عن كراسة التمارين؟

لقد روعي في إعداد كراسة التمارين للصف الثاني عشر أن تتضمن عدداً كبيراً من التمارين والمسائل المتنوعة، وذلك لإعطاء المتعلم فرصة للتدرب على إتقان المهارات، وتنمية قدرته على حل المسائل الرياضية من جهة، ومراعاة الفروق بين المتعلمين من جهة أخرى. ولتحقيق هذه الغايات تم وضع التمارين والمسائل في كل بند في مجموعتين الأولى «A» بعنوان «تمارين أساسية» وتتضمن تمارين ومسائل ينبغي أن يحلها المتعلمون - يمكن إعطاء بعضها كواجبات بيتية - ومناقشة أفكارها وحلولها معهم. والمجموعة الثانية «B» بعنوان «تمارين تعزيزية وإثرائية» يمكنك حل أو مناقشة بعضها وفق حاجات طلبتك لتعزيز تعلمهم وإثرائه. وتترك ما يتبقى منها للطلبة ليحل كل منهم ما يتناسب مع قدراته وإمكاناته وحاجاته خارج غرفة الصف، ولست ملزماً بحلها ومناقشتها في الحصص الصفية.

الرياضيات (الجزء 1) (منظومة المحتوى)



أسس تربوية عامة في تدريس الرياضيات

تقديم

■ يجري تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية على شكل وحدات دراسية موزعة بين صفوف المرحلة، وبين التصنيفات الرياضية المعروفة: حساب المثلثات والهندسة التحليلية والجبر والهندسة الفراغية والإحصاء والاحتمال وحساب التفاضل والتكامل calculus بشقيه: التفاضل differentiation والتكامل integration. ومن ناحية أخرى فإن المحتوى ينمو رأسياً (عبر الصفوف) وحلزونياً في كل فرع، ويتوزع أفقياً (في كل صف) بحيث يتضمن وحدات من فروع مختلفة تعكس - إلى حد ما - وحدة الفكر الرياضي. ويراعى في جميع الحالات التناغم الرياضي لمتطلبات الوحدات على اختلاف انتماءاتها الفرعية ولخدمة العلوم الأخرى ذات الصلة.

أهداف تدريس الرياضيات

الرياضيات مادة حيّة تنمو وتتطور، وقد نشأت أصلاً لخدمة حاجة الإنسان في حياته العملية، وما زالت هي الأداة الأساسية لحل المشكلات وخدمة العلوم الأخرى، بل إن التقدم التقني المعاصر هو تقدم يستند إلى الأساليب الرياضية، والنماذج الرياضية التي تستخدم لبناء وتطوير الأجهزة والبرمجيات التي تستخدم فيها. ولا يقتصر استخدام الرياضيات على العلوم الطبيعية والهندسية والطبية والزراعية والفيزيائية، ولكنها تستخدم أيضاً في العلوم الإنسانية والاجتماعية بل وفي الفنون واللغويات. من ناحية أخرى فإن الرياضيات ذاتها تتقدم وتتطور، فهي من حين لآخر تلتفت إلى نفسها لتعيد بناء وترتيب تركيباتها وأساليب براهينها ومعالجتها، ومن ثم فهي دائماً تأتي بالجديد سواء ظهر بصور رياضية بحثية أو من خلال التطبيقات الواسعة، خاصة في الاقتصاد وفي وسائط الاتصال الإلكتروني وتقنية المعلومات، ومعادلات ومتباينات التوقعات في المجالات المختلفة. ولا شك في أن المعلم لا بد أن يكون على وعي ودراية ولديه ثقافة رياضية عامة عن المادة التي يقوم بتدريسها. والمعلم - بطبيعة الحال - يواجه دائماً بالسؤال العتيد «لماذا نعلم الرياضيات؟» هناك أكثر من طريقة للتعريف بأهداف تعليم الرياضيات، أشهرها تصنيف الأهداف إلى:

(1) أهداف معرفية Cognitive

تتعلق بالمفاهيم والنظريات والمهارات العقلية المتدرجة والمتنوعة في تعلم معارف رياضية كثافة عامة أو إعداد لدراسات تالية في المراحل التعليمية المتتابعة. وهناك ثلاثة مستويات معرفية: مستوى أدنى، ويتضمن مجرد تذكر المعلومات واستيعابها. ومستوى متوسط، ويتضمن التطبيقات المباشرة لما يتعلمه الطالب من قوانين ونظريات. ومستوى أعلى، ويتضمن تنمية مهارات التفكير العليا، وحل المشكلات بما تتطلبه من تحليل وتركيب وتقييم لمسائل وعلاقات ومواقف رياضية وتطبيقية.

(2) أهداف وجدانية Affective

تتعلق بتقدير appreciation الرياضيات كعلم ومجال وأسلوب تفكير بشري، وتقدير الرياضيين وإسهاماتهم، وتكوين ميول واتجاهات إيجابية نحو دراسة الرياضيات، ونحو دورها في التقدم ونحو أساليبها في التفكير ودقة لغتها في الاتصال سواء بالرمز أو بالشكل البياني.

(3) أهداف نفسحركية Psychomotor

يقصد بها تنمية مهارات عملية، مثل الإنشاءات الهندسية، واستخدام أدوات ذات طابع رياضي هندسي أو حسابي أو حوسبي (متعلقة بالحاسوب) سواء في صورة آلات حاسبة calculators أو حواسيب computers، وأن يكتسب الطالب مهارات استخدام التقنية المتاحة من أجهزة وأقراص مدمجة CDs جاهزة مناسبة.

إستراتيجيات عامة للتدريس

إستراتيجية التدريس: هي خطة تحركات المعلم في تحقيق أهداف الدرس، مع ملاحظة أن الهدف الأساسي للتدريس والتعليم هو أن يتعلم الطالب. ويقاس نجاح الإستراتيجية بمدى كفاءتها في أن يتعلّم الطلاب ما قصد لهم أن يتعلموه بغرض مساعدة الطلاب في أن يبنوا بأنفسهم ويكتشفوا المعارف التي يتعلمونها في ضوء النظرية البنائية constructivism.

وتتضمن إستراتيجية التدريس أن يقوم المعلم بالآتي:

– التقدّم بمشكلة أو سؤال يثير انتباه الطلاب (وقد يكون قصة تاريخية).

– إعطاء فرصة للطلاب للمناقشة.

– توزيع العمل بين أعمال تعاونية في مجموعات صغيرة تعمل تعاونياً، وأعمال فردية يفكر فيها كل طالب بنفسه، وأعمال جماعية يحدث فيها تفاعلات بين المعلم والطلاب وبين الطلاب أنفسهم.

– في نهاية كل مناقشة أو عمل تعاوني أو عروض من جانب بعض الطلاب يقوم المعلم بتلخيص واضح لما تم مناقشته أو حله متضمناً الأساسيات: وهي عبارة عن تعريفات، علاقات، منطوق نظريات لها براهين، إلخ.

– إعطاء الطلاب فرصاً داخل الصف أو في المنزل (واجبات) لاكتشاف بعض الخواص أو العلاقات بأنفسهم.

– تشجيع الطلاب على إعطاء حلول أو براهين بديلة.

– عند تدريس أي مفهوم أو علاقة بين عدة مفاهيم يطلب المعلم إلى الطلاب إعطاء أمثلة تمثل المفهوم أو تحقق العلاقة، وأخرى لا تمثلها أو لا تحققها.

– ابتعاد (المعلم) عن الشرح طوال الوقت وكتابة الحلول جاهزة كاملة على اللوح وطلب نقلها في الكراسات من دون مناقشة أو محاولات مسبقة من الطلاب.

– تنويع السلوكيات (أي طرق التدريس) في الحصة الواحدة.

– الحرص على إعطاء رعاية خاصة في فترة العمل الفردي أو في المجموعات التعاونية للطلاب بطيئي التعلم أو من هم دون المستوى في قدراتهم على التعلم، وكذلك الحال بالنسبة إلى الطلاب المتفوقين.

– تنويع الواجبات سواء داخل الصف أو في المنزل مع مراعاة الفروق الفردية – ليس من الضرورة أن يحل كل الطلاب جميع التمارين في الكتاب خاصة بالنسبة إلى الطلاب «الضعاف»، فيقدّم لهم الحد الأدنى، ويلاحظ تقدمهم حتى يصلوا إلى مستويات أفضل مُتدرّجين في الواجبات.

– تحديد بعض الساعات للمساعدة خارج الصف في مكتب المعلم أو في المكتبة.

– مساعدة الطالب على أن يشعر بأنه يمكنه النجاح والتفوق في هذا المقرر.

الوسيط التعليمي هو مادة تعليمية مكتوبة أو مرسومة ، أو صورة ثابتة أو متحركة مُسجَّلة على أوراق أو شرائط أو أقراصٍ مدمجة (CDs) أو مخزنة على كمبيوتر.

وتشمل الوسائط التعليمية الأدوات والأجهزة المستخدمة في عرض واستخدام المواد التعليمية والبرمجيات. وقد يكون الوسيط التعليمي مُلصقاً أو بطاقاتٍ كرتونية أو قطعاً خشبية أو بلاستيكية أو أجهزة لعرض شفافيات أو صور معتمة أو جهاز سينما أو حاسوباً، وقد تكون موادّ من الطبيعة أو مصنّعة أو نماذج محاكاة لأشكال هندسية أو تجارب معملية.

والأصل في الوسيط التعليمي هو أن يستخدمه الطالب بنفسه ويمارس من خلاله عملاً تعليمياً نشيطاً، لا أن يكتفي بمشاهدته سواء قام المعلم بتشغيله أو كان يعمل آلياً، فالمهم مثلاً أن يعمل الطالب على الحاسوب hands on لاكتشاف علاقة رياضية أو تحقيق صحتها أو تمثيل بياني لأحد الجداول أو الدوال الجبرية مستخدماً برنامج اللوحة الجدولية spreadsheet أو رسم بعض الأشكال الهندسية باستخدام سلحفاة برنامج اللوجو (LOGO). والمبدأ الذي نرتئيه هنا هو أن التقنية بصفة خاصة، والوسائط التعليمية المتعدّدة بصفة عامة، «حليفة وليست بديلة للمعلم» - بمعنى أن التكنولوجيا أداة يستثمرها المعلم في تيسير عملية التعلم لا أن تحل محله.

محتوى الجزء الأول للفصل الثاني عشر

يتناول المحتوى ثلاث وحدات هي:

عدد الحصص المقترح	
23	(1) النهايات والاتصال – معدلات التغير والنهايات – الاتصال – معدلات التغير وخطوط المماس
30	(2) المشتقات – مشتقة دالة – قابلية الاشتقاق (التفاضل) – قواعد الاشتقاق – مشتقات الدوال المثلثية – قاعدة السلسلة
32	(3) تطبيقات المشتقات/التفاضل – القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال – الدوال المتزايدة والمتناقصة – ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بالرسم البياني للدالة f – النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى) – المعدلات المرتبطة

الوحدة 1	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
النهايات والاتصال	معدلات التغير والنهايات	- السرعة المتوسطة - السرعة اللحظية - النهاية - نظرية الشظيرة	- إيجاد السرعة اللحظية - إيجاد النهاية - العمليات على النهايات عندما $x \rightarrow a$ - استخدام نظرية الشظيرة
	الاتصال	الدوال المتصلة	- إيجاد نقاط الاتصال ونقاط الانفصال - التخلص من الانفصال - العمليات على الدوال المتصلة
	معدلات التغير وخطوط المماس	- متوسط التغير - ميل المماس لمنحنى - ميل الخط العمودي على المنحنى - ميل المنحنى - السرعة	- إيجاد متوسط التغير - إيجاد معادلة المماس على المنحنى - إيجاد معادلة الخط العمودي

المشتقات	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
المشتقات	الاشتقاق قابلية الاشتقاق	المشتقة المشتقة من جهة واحدة	- إيجاد العلاقة بين الرسم البياني للدالة والرسم البياني لمشتقتها - إيجاد المشتقة - العمليات على الاشتقاق - إيجاد مشتقات ذات الرتب العليا
مشتقات الدوال المثلثية	مشتقات الدوال المثلثية	- مشتقة دالة الجيب وجيب التمام - الحركة التوافقية البسيطة - مشتقات الدوال المثلثية الأساسية الأخرى	- إيجاد مشتقة دالة الجيب وجيب التمام والظل وظل التمام (cot) - وقاطع الجيب (csc) وقاطع جيب التمام (sec)
قاعدة السلسلة	قاعدة السلسلة	- مشتقة دالة الدالة - ميل المنحنيات البارامترية - قاعدة سلسلة القوى	- إيجاد مشتقة دالة الدالة - تطبيق قاعدة من الخارج إلى الداخل - تطبيق قاعدة السلسلة

الوحدة 3	المكونات الفرعية	مفاهيم	مهارات
تطبيقات المشتقات (التفاضل)	القيم القصوى والقيمة المتوسطة	- القيم القصوى المطلقة الصغرى والعظمى - القيم القصوى المحلية (النسبية) - القيمة المتوسطة - الدوال المتزايدة والمتناقصة	- إيجاد قيم قصوى - إيجاد النقطة الحرجة - إيجاد القيمة المتوسطة - إيجاد الدالة المتزايدة - إيجاد الدالة المتناقصة - إيجاد السرعة اللحظية
	ربط المشتقتين الأولى والثانية بالرسم البياني لدالة. النمذجة والأوفقية	- اختبار المشتقة الأولى والثانية - التقعر - نقاط الانقلاب	- رسم مستطيلات محاطة بمنحنيات - التعلم عن الدالة من مشتقاتها - استخدام اختبار المشتقة الأولى - إيجاد التقعر - إيجاد نقاط الانقلاب - استخدام اختبار المشتقة الثانية
	المعدلات المرتبطة	- معادلات المعدلات المرتبطة - محاكاة الحركة المرتبطة	إيجاد معادلات المعدلات المرتبطة

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
– سرعة سقوط صخرة من تل.	– السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$ – السرعة اللحظية = $V(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ – إذا كان c، L عددين حقيقيين، فالدالة f يكون لها نهاية L عندما تقترب x من c. إذا كان بالإمكان جعل الفرق بين $f(x)$ و L قريباً من الصفر أو يساويه بأخذ قيم للمتغير x قريبة جداً من c، $x \neq c$ ونكتب $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$. نهاية الدالة الثابتة حيث k ثابت $\lim_{x \rightarrow c} (k) = k$ نهاية الدالة المحايدة عند $c = x$ $\lim_{x \rightarrow c} (x) = c$ – ويمكننا حساب النهايات لدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية، وهذه الحقائق موضحة في نظرية (1). – إذا كانت L, M, c, k أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$، فإن: (1) قاعدة الجمع: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$ نهاية مجموع دالتين هي مجموع نهايتيهما. (2) قاعدة الفرق: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$ نهاية الفرق بين دالتين هي الفرق بين نهايتيهما. (3) قاعدة الضرب: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$ نهاية حاصل ضرب دالتين هي حاصل ضرب نهايتيهما. (4) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$ نهاية ثابت مضروب في دالة هي حاصل ضرب الثابت في نهاية الدالة. (5) قاعدة ناتج القسمة: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$، $M \neq 0$ نهاية ناتج قسمة دالتين هي ناتج قسمة نهايتيهما بشرط ألا تساوي نهاية المقام صفراً. (6) قاعدة القوى: إذا كان r, s عددين صحيحين، $s \neq 0$، $\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$ على شرط أن $L^{r/s}$ عدد حقيقي. نهاية دالة لجهة اليسار $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ نهاية دالة لجهة اليمين $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ – الدالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت، النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند c موجودتين، وكتاهما تكونان متساويتين $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
	نظرية الإحاطة (الشطيرة): – تتعلق هذه النظرية بدالة f قيمها بين قيم دالتين أخريين g, h. إذا كان للدالتين g, h النهاية نفسها عندما $x \rightarrow c$ فإن للدالة f أيضًا هذه النهاية. – نقطة داخلية: تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها إذا كان $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ – نقطة طرفية (حدية): تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية جهة اليسار (a) أو نقطة طرفية جهة اليمين (b) في مجالها إذا كان $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \text{ أو } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ – إذا كانت الدالة f غير متصلة عند نقطة c، فنعتبر عن ذلك بأن f غير متصلة عند c، c هي نقطة انفصال للدالة f مع ملاحظة أن c ليست بحاجة إلى أن تكون في مجال f. تكون الدالة متصلة على فترة إذا وفقط إذا كانت متصلة عند جميع نقاط الفترة. – إذا كانت f, g دوال متصلة عند $x = c$ فإن التوافقات التالية لدوال هي دوال متصلة عند $x = c$. (1) الجمع: $f + g$ (2) الطرح: $f - g$ (3) الضرب: $f \cdot g$ (4) الضرب في ثابت: $k \cdot f$ حيث k أي عدد (5) ناتج القسمة: f/g بشرط $g(c) \neq 0$
– النمو في المختبر	– متوسط التغير لدالة على فترة، هو قيمة ذلك التغير مقسومًا على طول تلك الفترة. – ميل المنحنى للدالة f في نقطة $x = a$ هو: $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا وجدت. – الخط العمودي على منحنى عند نقطة معرفة هو الخط العمودي على المماس للمنحنى عند تلك النقطة.

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
	– الدالة المشتقة للدالة f بدلالة x هي : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ إذا وجدت.}$ أو $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ وهي المشتقة في $x = a$ إذا وجدت. – دالة مشتقة لجهة اليمين $f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ – دالة مشتقة لجهة اليسار $f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ – تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في نقطة $x = a$ إذا وفقط إذا كان $f'(a^-) = f'(a^+)$. – إذا كانت الدالة f لها اشتقاق عند نقطة $x = a$ فهي متصلة عند هذه النقطة. ولكن العكس لا يكون دائماً صحيحاً. – قواعد الاشتقاق: $\frac{dc}{dx} = 0; \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ $\frac{d(cu)}{dx} = c \frac{du}{dx}; \quad \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}u \pm \frac{d}{dx}v;$ $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} (v \neq 0)$
	– معدل التغير عند $x = a$: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
	$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \end{aligned} \right\} \text{ - اشتقاق الدوال المثلثية:}$ $\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} f(t) &= a \cos t \\ \text{أو} \\ g(t) &= a \sin t \end{aligned} \right\} \text{ - الحركة التوافقية البسيطة:}$ $y = f(u) \text{ حيث } u = u(x) \text{ اشتقاق دالة الدالة:}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \text{ أو } \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \times g'(x) \text{ حيث } y = f(g(x))$ $y = f(u) = u^n \text{ دالة الاشتقاق لدالة القوى:}$ $u = u(x)$ $\frac{d}{ds} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$
	$\text{ - إذا } f \text{ دالة مجالها } D, \text{ فإن } f(c) \text{ تكون:}$ $(أ) \text{ القيمة العظمى المطلقة على } D \text{ إذا وفقط إذا كانت } f(x) \leq f(c) \text{ لكل } x \text{ تنتمي إلى مجال } D.$ $(ب) \text{ القيمة الصغرى المطلقة على } D \text{ إذا وفقط إذا كانت } f(x) \geq f(c) \text{ لكل } x \text{ تنتمي إلى مجال } D.$ $\text{ - إذا كانت } f \text{ دالة متصلة على فترة مغلقة } [a, b] \text{ فإن } f \text{ تكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى على هذه الفترة.}$

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
	– إذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f، فإن $f(c)$ تكون: (أ) قيمة عظمى محلية عند c إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c. (ب) قيمة صغرى محلية عند c إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(c)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على c. – إذا كان لدالة f قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية عند نقطة داخلية c في مجالها، وكانت f' لها وجود عند c، فإن $f'(c) = 0$. – النقطة الحرجة لدالة f هي نقطة داخلية في مجال الدالة يكون عندها $f' = 0$ أو f' غير موجودة. – إذا كانت $y = f(x)$ متصلة عند كل نقطة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة تنتمي لداخلها (a, b) فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل c في (a, b) يكون عندها $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – لتكن f دالة معرفة على الفترة I ولتكن x_1, x_2 أي نقطتين في الفترة I. (1) f دالة تتزايد على I إذا كان: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ (2) f دالة تتناقص على I إذا كان: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ – لتكن f دالة متصلة على الفترة $[a, b]$، وقابلة للاشتقاق على (a, b). (1) إذا كانت $f' > 0$ عند كل نقطة في (a, b)، فإن f تتزايد على $[a, b]$. (2) إذا كانت $f' < 0$ عند كل نقطة في (a, b)، فإن f تتناقص على $[a, b]$. – إذا كان $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $f(x) = C$ لكل x في I. – إذا كان $f'(x) = g'(x)$ عند أي نقطة في فترة I، فإنه يوجد ثابت C بحيث $f(x) = g(x) + C$ لكل x في I.

تطبيقات حياتية	قوانين ونظريات
- السقوط من موقع - استخدام انحدار - تصنيع صندوق - تصميم علبة أسطوانية الشكل - إنشاء مخروطات - القيمة العظمى للربح - تخفيض التكلفة	- ينطبق الاختبار الآتي على دالة متصلة $f(x)$. - عند أي نقطة حرجية c: (1) إذا كانت المشتقة f' تتغير إشارتها من الموجب إلى السالب عند c ($f' > 0$) ، عندما $x < c$ ، $f' < 0$ ، عندما $x > c$ ، فإن الدالة f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c . (2) إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند c ($f' < 0$) ، عندما $x < c$ ، $f' > 0$ ، عندما $x > c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلية عند c . (3) إذا لم تتغير إشارة f' عند c (f' يكون لها الإشارة نفسها على جانبي c) ، فإن f لا يكون لها قيمة متطرفة محلية عند c . - إذا كان $f' < 0$ (أو $f' > 0$) لكل $x > a$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية (أو قيمة صغرى محلية) عند النقطة a . - إذا كانت $f' < 0$ (أو $f' > 0$) لكل $x < b$ ، فإن الدالة f تكون لها قيمة صغرى محلية (أو قيمة عظمى محلية) عند b . - الرسم البياني لدالة قابلة للاشتقاق $y = f(x)$ يكون (أ) مقعراً لأعلى في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متزايدة في الفترة I . (ب) مقعراً لأسفل في فترة مفتوحة I إذا كانت y' متناقصة في الفترة I . - النقطة التي عندها يكون للرسم البياني لدالة خط مماس ويتغير تقعر المنحنى على جانبيها هي نقطة انقلاب . (1) إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محلية عند $x = c$. (2) إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$.
- التقدير التقريبي للمساحة السطحية للأرض - مطاردة على الطريق السريع - ملء خزان مخروطي الشكل - سلم منزلق على حائط	- القيمة العظمى للربح (إذا وجدت) تحدث عند مستوى الإنتاج الذي عنده الدخل الحدي يساوي التكلفة الحدية . - مستوى التكلفة (إذا وجد) الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن هو المستوى الذي عنده تكون التكلفة المتوسطة تساوي التكلفة الحدية .

المفهوم	النهايات والاستمرار	المشتقات	تطبيقات المشتقات
– الأعداد الحقيقية	– حساب النهايات	– مشتقة دالة في نقطة	– القيم القصوى (الصغرى والعظمى)
النسبة	– معادلات التغير	– قاعدة الاشتقاق	– السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية
المعادلة	– خطوط المماس – خطوط عمودية		
الهندسة			– إيجاد أصغر محيط – تصميم صفحة – تصميم علبة أسطوانية
ترابط (connection)			– حركة ثقل معلق في لولب – مطاردة على الطريق السريع
تواصل (communication)	– أعداد ورموز وجمل رياضية وأشكال بيانية	– أعداد ورموز وجمل رياضية ورسوم بيانية	– أعداد ورموز وجمل رياضية وجمل لفظية وتمثيلات بيانية وسلوك طرفي منحنى الدالة

أهداف خاصة لتعليم الوحدات الثلاث في الجزء الأول

في ضوء الأهداف العامة السابقة وتناغمًا مع ما سبق للطالب دراسته وما هو متوقع أن يدرسه من رياضيات، فقد تم اختيار ثلاث وحدات للجزء الأول بقصد أن يكتسب الطالب الآتي:

أولاً: بالنسبة إلى وحدة النهايات والاتصال:

- (1) تعرف النهايات المحدودة للمتغير وللدالة.
- (2) استخدام معدلات التغير.
- (3) تعرف الاتصال في الدالة.
- (4) إيجاد معادلة المماس على منحنى ومعادلة الخط العمودي على المنحنى في نقطة.

ثانياً: بالنسبة إلى وحدة المشتقات:

- (1) تعرف مشتقة الدالة وترميزها.
- (2) تعرف العلاقة بين الرسم البياني للدالة f ومشتقتها f' .
- (3) تعرف العمليات على الاشتقاق.
- (4) استخدام الاشتقاق في الحياة اليومية.
- (5) تطبيق المشتقات على الرسوم البيانية.

ثالثاً: بالنسبة إلى وحدة تطبيقات المشتقات/التفاضل:

- (1) تعرف القيم القصوى المطلقة.
- (2) تطبيق المشتقات على الدوال المتزايدة والمتناقصة.
- (3) استخدام المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' في الرسم البياني f .
- (4) تطبيق المشتقات على مسائل الاقتصاد والصناعة.
- (5) تعرف معدلات المعدلات المرتبطة.

اقتراحات لتدريس الوحدات الثلاث وحلول التمارين

لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسمت هذه الوحدة إلى 3 دروس على النحو الآتي:

1-1 معدلات التغير والنهايات (ص 8-16)

المصطلحات الأساسية: السرعة المتوسطة، السرعة اللحظية، نهاية الدالة، نظرية الإحاطة (الشطيرة).

1-2 الاتصال (ص 17-21)

المصطلحات الأساسية: الاتصال، نقطة انفصال، انفصال نهائي، انفصال تذبذبي، دالة متصلة.

1-3 معدلات التغير وخطوط المماس (ص 22-27)

المصطلحات الأساسية: متوسط التغير، المماس للمنحنى، معدل التغير.

ماذا سيتعلم الطلاب؟
ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة معدلات التغير والنهايات وخصائصها، ومن ثم يتفهمون نقاط الاتصال والانفصال والدالات المتصلة وتطبيقاتها الحياتية. وسيعمقون معارفهم بتفهم معنى ميل المنحنى وميل المماس عند نقطة على منحنى والخط العمودي على منحنى.

مشروع الوحدة
عرض المشروع:

اسأل الطلاب إذا كانوا يشاهدون النشرة الجوية على التلفاز أو إذا كانوا يتابعون تغير الحرارة من وقت لآخر على ميزان الحرارة في السيارة أو في البيت. ناقش معهم تغير درجات الحرارة في الصف طيلة يوم دراسي بواسطة ميزان حرارة يوضع في الغرفة.

سلم التقييم:

- 4 - الحسابات صحيحة بكاملها. الرسم البياني واضح ويزر النتائج. التوقعات معقولة. التقرير مفصل ودقيق. مقياس الرسم واضح ويمثل البيانات بشكل كامل.
- 3 - معظم الحسابات صحيحة مع أخطاء قليلة. الرسم البياني واضح مع بعض الأخطاء. التوقعات معقولة بأغلبيتها. التقرير مفصل. مقياس الرسم واضح ويمثل البيانات إلى حد كبير.
- 2 - يوجد أخطاء متعددة في الحسابات. الرسم البياني غير واضح وفيه أخطاء متنوعة. التقرير غير مفصل وفيه نواقص. مقياس الرسم غير منطقي.
- 1 - معظم عناصر المشروع غير كاملة أو ناقصة.

إجابات مشروع الوحدة:

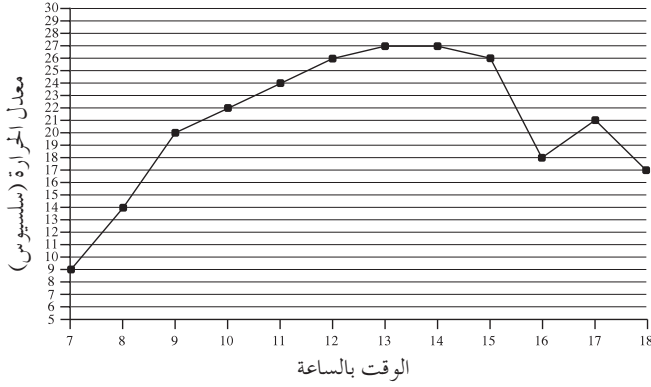
(1) أوجد بالحساب

(أ) متوسط التغير: $315 \div 3 = 105 \text{ AED}$

(ب) 2.19 درهماً

(ج) $0.02 = 2\%$

(2) أوجد بالتحليل والرسم البياني (أ)



(ب) تتنوع الإجابات: مثال على الفترة [9, 13] يكون

متوسط التغير هو: $\frac{27 - 19}{13 - 9} = \frac{8}{4} = 2$ أي أن متوسط

التغير هو 2° لكل ساعة ما بين التاسعة صباحاً والواحدة بعد الظهر.

(ج) انظر الرسم البياني

ميل القطعة الأولى: $\frac{14 - 9}{8 - 7} = 5$

ميل القطعة الثانية: $\frac{19 - 14}{9 - 8} = 5$

ميل القطعة الثالثة: $\frac{22 - 19}{10 - 9} = 3$

وهكذا... نلاحظ أن ميل كل قطعة يختلف عن الأخرى.

(د) تتنوع الإجابات: يمكن أن نأخذ نقطة على المماس مثل:

$(10.5, 23^\circ)$

فيكون ميل خط المماس هو حوالي: $\frac{23 - 22}{10.5 - 10} = \frac{1}{0.5} = 2$

وبالتالي متوسط التغير ما بين الساعة 10 A.M والساعة 10:30 A.M هو حوالي درجتين.

مشروع الوحدة

تفاعل كثير من مفاهيم التفاضل والتكامل مع أفكار تقسيم متوسطات ومعدلات التغير. عندما نتحدث عن متوسط التغير نعلم بذلك قيمة التغير لكمية واحدة على فترة لكل تغير من وحدة كمية أخرى. مثال ذلك: إذا اجتازت سيارة مسافة 90 mi في ساعتين سوف يكون متوسط السرعة 45 mi/h وهذا يعني أننا نتوقع أن تكون المسافة التي اجتازتها تتغير 45 mi/h لكل ساعة تغير في الزمن.

معدلات التغير
وعطوف المماس

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 1-2

- (1) 2
- (2) (a) -2
(b) -1
(c) لا نهائية
(d) -1
- (3) (a) 1
(b) 2
(c) لا نهائية
(d) 2
- (4) $(2x - 1)(x + 5) = 0$
 $x = \frac{1}{2}; x = -5$
- (5) $-x^2 + 6x - 8 = 4$
 $-x^2 + 6x - 12 = 0$
 $\Delta = 36 - 4 \times 12 = -12$

لا توجد حلول حقيقية

- (6) $-x^2 + 6x - 8 = c$
 $x^2 - 6x + 8 + c = 0$
 $\Delta = 36 - 4(8 + c) < 0$
 $1 - c < 0$ لا توجد حلول $9 < 8 + c$
 إذا كانت $1 - c < 0$ إذاً $c > 1$

ملاحظة رياضية

$f(x) = \sin x = [x]$
 تكون $x \in]a, b[$ عند x عند x عند x
 $[x] = a$
 $x \in]a, b[$
 تكون
 $[x] = a$

مثال (1.4) ● **قيم نهاية الدالة عند**

دالة صحيح $x \mapsto [x]$ لها نهايات مختلفة جهة اليسار وجهة اليمين لكل عدد صحيح وزي في الشكل (1.4). على سبيل المثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [x] = 2, \lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$$

وعلى ذلك فإن نهاية صحيح و عددا تقرباً من العدد الصحيح ومن جهة اليسار فإنها تساوي a بينما النهاية عددا تقرباً من العدد الصحيح ومن جهة اليمين فإنها تساوي $a + 1$.

أي أنه عند كل عدد صحيح، فإن دالة الصحيح $x \mapsto [x]$ و لها نهايات مختلفة من جهة اليسار ومن جهة اليمين.



شكل (1.4)
النتيجة

3) أمثلة ● **نوجد** $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. نعلم إحداثياتها:

نظرية (1.5): النهاية من جهة واحدة أو من الجهتين

دالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقرب x من a إذا وفقط إذا كانت النهاية اليسرى والنهاية اليمنى للدالة عند a موجودتان، وكلاهما تكونان متساويتين:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

وعلى ذلك فإن دالة الصحيح $x \mapsto [x]$ في مثال (1.4) ليس لها نهاية عند 0 . رغم وجود نهاية للدالة في كل جهة.

ملاحظة رياضية

عند x على أن الدالة صحيحة في النهاية.

مثال (1.6) ● **النهاية وجود نهاية اليسار ونهاية اليمين**

الحق أن النهاية لأولية من الدالة $f(x) = x$ والرسالة التي لها في شكل (1.5) من نهاية الدالة f عند قيم x التي تنسب إلى مثال (1.6) هي: **صحيحة**.

عند $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$
 عند $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$
 عند $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

وعلى ذلك فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجود (النهاية من جهة اليسار ومن جهة اليمين غير متساويتين).

على الرغم من أن $f(1) = 1$

الوحدة الأولى

ومنه يكون

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 \frac{\sin x}{x} = 2 \times 1 = 2$$

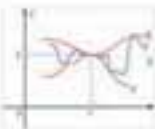
(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 3 + 2 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x+2} = \frac{3}{3} = 1$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

وعصفاً إذا كان K, L عددين حقيقيين، $L \neq 0$ و $K \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin Kx}{Lx} = \frac{K}{L} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x} = \frac{K}{L}$$



شكل (1.8.1)

إذا كان $f(x)$ بين $g(x)$ و $h(x)$ في حين x يقترب من a ،
فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

نظرية الإحصاء

(i) لم يكن ممكناً إيجاد نهاية مباشرة، فاستعملنا إحصاءاً بطريقة غير مباشرة باستخدام نظرية الإحصاء. لتعلم هذه الطريقة بدلاً من إيجاد قيم دائرين أخرى، إذا كان لدينا y ، g النهاية عندما $x \rightarrow a$ فإن $h(x)$ أيضاً هذه النهاية، كما في شكل (1.8.1).

نظرية (1.8.2) نظرية الإحصاء

إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$



شكل (1.8.2)

إذا كان $f(x)$ بين $g(x)$ و $h(x)$ في حين x يقترب من a ،
فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

مثال (1.8.3)

استخدم نظرية الإحصاء

بين $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

الحل

علم أن $\sin$ دائماً مقيّد بين -1 و 1 ، لذلك فإن

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

و $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$ ومن نظرية الإحصاء فإن

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

والرسم النهائي في الشكل (1.8.3) يظهر هذه النتيجة.

بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

قوانين النهاية للدرس 1-2

1 أوجد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4}$.

2 إذا كان $f(x) = [x]$ ، أوجد كل نهاية:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (d) $f(-1)$

3 إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5, & x < 2 \\ 4 - x, & x \geq 2 \end{cases}$ ، أوجد كل نهاية:

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (d) $f(2)$

4 استخدم التحليل لحل $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

* في التمرين (5, 6)، إذا كان $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \leq 3 \\ -x^2 + 6x - 8, & x > 3 \end{cases}$

5 حل المعادلة $f(x) = 4$.

6 أوجد قيمة c بحيث إن المعادلة $f(x) = c$ ليس لها حل.

أوجد بالحساب والتحليل والرسم البياني

مشروع
الوحدة

1 عثر عماد على كمبيوتر لمعدل التغير.
(أ) إذا زاد سعر بطاقة السفر بالطائرة من بيروت إلى دبي 315 AED

خلال الأشهر الثلاثة الأخيرة.

(ب) انخفض سعر السهم لأحدى الشركات في 5 أيام متتالية 10.95 AED

(ج) إذا كانت ميزانية أحد المصارف في السنوات الأربع الأخيرة 8%

(د) يتوقع طائر خسار 9 kg من وزنه في 6 أسابيع نتيجة لممارسة التمارين الرياضية والتأرجح حديقته.

2 لتفترض أن الجدول يمثل قيم درجات الحرارة ليوم واحد من شهر ديسمبر في مدينة العين.

(أ) مثل البيانات على المحاور مستخدماً مقياساً على المحور الأفقي من 7 إلى 18 ومقياساً على المحور الرأسي من 5 إلى 35 [يمكن أن تمثل نقطة الأصل بالزوج المرتب (5, 7)] استخدم القاموس لرسم منحني درجات الحرارة كنقطة بالنسبة إلى الوقت في هذه الفترة.

(ب) أطلب إلى كل طالب من مجموعتك إيجاد متوسط التغير لدرجة الحرارة على فترات مختلفة من الوقت (مثلاً بعد أخذهم متوسط التغير على الفترة من 9 AM إلى 13 PM)

(ج) أرسم القطع المستقيمة بين النقاط المناظرة ثم أوجد ميل كل قطعة. ماذا تلاحظ؟

(د) بين ميل كل قطعة مستقيمة على الرسم البياني متوسط تغير الحرارة في كل فترة. وميل المناس في كل نقطة على الرسم البياني هو أيضاً تغير الحرارة في هذه النقطة وتحصل على "معدل التغير اللحظي".

أطلب إلى كل طالب رسم مماس عند النقطة (10AM, 22°C) على الرسم البياني. اختر نقطة على هذا المماس ثم قدر إحداثياتها واستخدم لإيجاد ميل خط المماس. كيف يمكن لهذا الوقت أن بين سرعة تغير الحرارة عند الساعة 10 AM؟

الوقت (ساعة)	درجة الحرارة (°C)
7AM	9°C
8AM	14°C
9AM	19°C
10AM	22°C
11AM	24°C
12PM	26°C
13PM	27°C
14PM	27°C
15PM	26°C
16PM	18°C
17PM	21°C
18PM	17°C

1- الأهداف:

- يتمكن الطالب من تحديد الفترات حيث تكون الدالة متصلة، ويفهم معنى دالة متصلة.
- يتمكن الطالب من إلغاء نقاط الانفصال للدالة.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

الاتصال عند نقطة، الدوال المتصلة، نماذج سلوك النهاية.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

اطلب إلى الطلاب رسم الدالة $f(x) = 2x - 3$ ثم اطلب إليهم رسم الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = -x + 3; x \leq 2$
 $f(x) = x + 1; x > 2$

اسألهم هل مستقيم الدالة الأولى متصل؟ نعم

هل المنحنى في الدالة الثانية متصل؟ لا

5- التدريس:

يمكن أن تبدأ الدرس باستخدام قلم رصاص لتتبع الرسم البياني لدالة متصلة على أي فترة بدون رفع القلم عن الورقة.
 ينبغي أن يكون تعريف الاتصال مفهوماً لدى الطلاب إذا أرادوا النجاح في هذا المقرر. كن واعياً وبغاية لتمييز بين الاتصال عند نقطة داخل المجال (الذي يتضمن نهاية ثنائية الجانب) والاتصال عند إحدى نقطتي نهايتي المجال (والذي يتضمن نهاية وحيدة الجانب).

تجري مناقشة أنواع مختلفة من عدم الاتصال في هذا الدرس. سوف يكون من المفيد توضيح كل نوع من عدم الاتصال باستخدام آلة علمية أو بشكل تقريبي على السبورة. ينبغي أن تستخدم مسميات الأنواع المختلفة من عدم الاتصال خلال هذا المقرر.

ملاحظات على الأمثلة

- يوفر مثال (1) مقدمة بصرية للدوال المتصلة. من المهم للطلاب أن يفهموا السبب في أن الدالة غير متصلة عند $x = 2$.
- يوضح مثال (3) فكرة أن الدالة المتصلة عند جميع نقاط مجالها، يمكن أن تتضمن نقطة عدم اتصال (لا تنتمي للمجال) ولكن الدالة معرفة على جانبيها.

دعنا نتذكر ونستعرض

الاتصال عند نقطة

عندما نقوم بتحديد قيم دالة في لشمار ما ونعقبها في المستوى الإحداثي، فإننا عادة ما نصل بين تلك النقاط بمنحنى غير متقطع، ليس كيف كانت على الأرجح قيم الدالة التي لم نوجدتها. وفي هذه الحالة نقول إن المنحنى متصل (انظر شكل 1.8) وعموماً يكون منحنى الدالة $y = f(x)$ متصلاً إذا أمكن رسمه بالقلم بخط واحد بدون رفع القلم.



بحث في الاتصال

أوجد النقاط التي عندها منحنى الدالة f في شكل (1.9) متصل والنقاط الأخرى التي عندها منحنى الدالة f غير متصل.

منحنى الدالة f متصل عند كل نقطة في مجالها ومن $[0, 4]$ ما عدا عند النقطتين $x = 1$ و $x = 2$ ، فعند كل منهما يوجد قطع في المنحنى. لاحظ العلاقة بين نهاية f وقيم f عند كل نقطة في مجال الدالة.

النقاط التي عندها منحنى f متصل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{عند } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \quad \text{عند } x = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \quad c \neq 2 \text{ و } c \neq 1, \quad 0 < c < 4$$

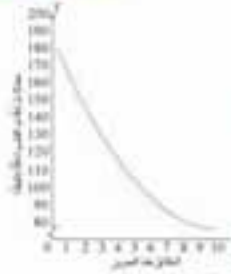
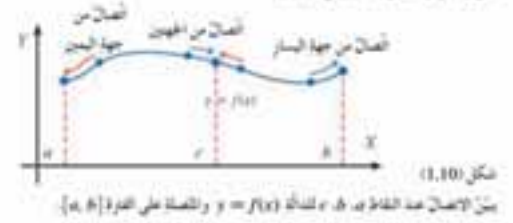
النقاط التي عندها منحنى f غير متصل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ غير موجود.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ لكن } f(2) \neq 1$$

في المثال السابق نقول إن الدالة متصلة عند كل نقطة في المجال $[0, 4]$ ما عدا عند النقطتين $x = 1$ و $x = 2$.

والتعريف للاتصال عند نقطة في مجال دالة فإننا نحتاج إلى تعريف الاتصال عند أي نقطة داخلية (أي لها نهاية من الجهتين) والاتصال عند النقاط الطرفية (الحدية) (التي تحوي نهاية من جهة واحدة). (شكل 1.10)



شكل (1.8)
كيف نعرف دالة الف
المنحنى لها هذا الشكل؟



شكل (1.9)
مثال (1)

6- الربط:

اطلب إلى الطلاب إحضار رسم بياني لتخطيط قلب معافى وناقش معهم كيفية اتصال جميع النقاط، وأيضاً رسم بياني لتخطيط قلب مريض وناقش معهم نقاط عدم الاتصال. أو اطلب إليهم مشاهدة تخطيط قلب مأخوذ في غرف العمليات.

7- أخطاء شائعة:

قد يجد بعض الطلاب صعوبة في أن يعرفوا الفرق بين الاتصال عند نقطة داخل المجال والاتصال عند نقطة طرفية.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: $1-A$ ، $4-A$ ، $7-A$ ، $9-A$.
تحقق من عمل الطلاب. تأكد من أنهم قد تفهموا معنى الاتصال على منحنى الدالة وأيضاً معنى نقاط الانفصال.

9- مسألة اليوم:

يتغير عدد أيام العمل اللازمة لإصلاح جزء من رصيف المدينة عكسياً بحسب عدد العمال الذين يقومون بهذا العمل. إذا كان يلزم عاملاً لإصلاح جزء معين من الرصيف خلال 12 يوماً، فما عدد العمال اللازم لإتمام المهمة خلال 4 أيام؟

(6 عمال؛ $y = \frac{k}{x}$)

استكشاف (1): التحليل من الاتصال

لكن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4}$

(1) حلل الدالة إلى عوامل ما كان الدالة؟
(2) على الرسم البياني الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4}$ اكتب أيها الاتصال يمكن التحليل منه عند $x = 3$ وعند $x = -2$ والاتصال لا يمكن التحليل منه.

(3) كيف يمكن تعريف $f(x)$ عند $x = 3$ كتحليل من الاتصال؟
(4) أين $x = 3$ هو أحد عوامل سطح الدالة أو تحليل من جميع العوامل المشتركين لأن $x = 3$ أحد العوامل عند $x = 3$ بعد الاختصار الذي حدث للدالة؟
(5) أين $x = -2$ الدالة بعد إعادة تعريفها تصبح:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4} & x \neq 3 \\ 10/3 & x = 3 \end{cases}$$

ملحوظة عند $x = 3$ ، الدالة $f(x)$ ملصقة عند إعادة تعريفها.

لكن $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4}$ عند $x = 3$ ، فإن $f(3) = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 6}{3^2 - 4} = \frac{3}{5}$ فمثلاً.

من يمكن تعريف $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4}$ عند $x = 3$ $f(3) = 1$ أصبح دالة ملصقة فمثلاً.

الدوال المتصلة

تكون الدالة $f(x)$ متصلة على a ، فقط إذا كانت ملصقة عند جميع نقاط الفترة.

الدالة المتصلة هي دالة ملصقة عند كل نقطة في مجالها.

تحليل الدوال المتصلة

الدالة $f(x) = 1/x$ هي متصلة عند كل نقطة في مجالها مع وجود نقطة الاتصال عند $x = 0$ حيث أنها غير معرفة هناك.

وبالتالي فهي ليست ملصقة على أي فترة تحتوي الصفر مثل $[-1, 1]$.

من الدوال المتصلة عند كل نقطة في مجالها:

(1) الدوال المتعددة الحدود.

(2) الدوال الجبرية $y = \sqrt{x}$.

(3) الدالة $f(x) = |x|$.

(4) الدوال الأسية.

(5) الدوال اللوغاريتمية.

(6) الدوال المثلثية الأساسية.

(7) الدوال العكسية (حيث يوجد لها نقاط انفصال عند أطراف النطاق).



مثال (1.13):
الدالة $f(x) = 1/x$ هي متصلة عند كل نقطة في مجالها مع وجود نقطة الاتصال عند $x = 0$ حيث أنها غير معرفة هناك.

1- الأهداف:

- يكون الطلاب قادرين على تطبيق تعريف ميل المنحنى بهدف إيجاد الميول.
- يكون الطلاب قادرين على إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة.
- يكون الطلاب قادرين على إيجاد معدل التغير للدالة.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

متوسط التغير، معدل التغير، مماس للمنحنى، ميل منحنى، خط عمودي على منحنى، السرعة اللحظية.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب، منقلة.

4- التمهيد:

اطلب إلى الطلاب رسم الخطوط المستقيمة $f(x) = x + 2$ و $f(x) = -x + 3$ ثم اسألهم عن قياس الزاوية التي يصنعها كل مستقيم مع الاتجاه الموجب للمحور السيني، ثم اطلب إليهم إيجاد ظل كل زاوية (tan) ومقارنة ظل كل زاوية مع معامل x .

5- التدريس:

إحدى الطرائق لتقديم هذا الدرس هي استرجاع نتائج المثاليين (1 و 2) في الدرس (1-1). ينبغي أن يكون معظم الطلاب مدركين لفكرة «الميل»، لذلك فإنه ينبغي تشجيعهم لفحص الرسوم البيانية لدوال كي يتأكدوا من معقولية إجاباتهم. يوفر متوسط التغير والمقدمة في هذا الدرس تطبيقاً مرتبطاً بالنهايات أو الدوال النسبية. وهو أيضاً مرتبط بالمشتقات، على الرغم من أننا لا نستخدم كلمة «مشتقة» في هذا الدرس. يمكن أن تلخص الدرس بأن تبين كيف توجد خطوط المماس والخطوط العمودية على منحنى $y = x^2 + x$ عند النقطة $(-3, 6)$.

ملاحظات على الأمثلة

- يقدم مثال (1) مفهوم متوسط التغير. قد ترغب في أن تبرز أن السرعة المتوسطة المحسوبة في الدرس (1-1) هي أمثلة لمتوسطات تغير.
- يوضح مثال (2) أن متوسط التغير يمكن تقديره تقريباً من الرسوم البيانية، حتى ولو كانت قاعدة الدالة غير معلومة.
- في مثال (3)، لاحظ أن «Q» نقطة يمكن أن تتحرك على المنحنى، وذلك على عكس نقطة ثابتة على المنحنى. فكرة: (ميل القاطع) $\lim_{Q \rightarrow P}$ فكرة معقولة في هذا السياق.

مقدمة للتعليم:

- متوسط التغير.
- ميل المنحنى.
- ميل القاطع.
- الخط العمودي على المنحنى.
- التماس.

1-3 معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

معدل التغير

Average Rates of Change

يستخدم تعبير متوسط التغير في كثير من الصيغ على السرعة المتوسطة (ميل المسافة) - متوسط النمو السكاني (النسبة المئوية لكل سنة) - متوسط سقوط الأجسام (الوقت) - التكلفة لكل ساعة وعلى ذلك فإن «متوسط التغير» في كثير من المجالات هو التغير في القيمة مقسوماً على الزمن الذي حدث فيه ذلك التغير. عموماً متوسط التغير للدالة على فترة $[a, b]$ قيمة ذلك التغير مقسوماً على طول تلك الفترة.

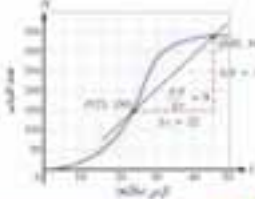
مثال (1): إيجاد متوسط التغير

أوجد متوسط التغير $f(x) = x^2 - 3$ على الفترة $[1, 3]$.

الحل: حيث $f(1) = 0$ و $f(3) = 24$ ، فإن متوسط التغير على الفترة $[1, 3]$ هو $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{24 - 0}{2} = 12$.

1. يمكن $f(x) = 2x^3 - 5$ ، أوجد متوسط التغير على الفترة $[0, 2]$.

عادة ما نرى على شكل الأرقام في معرفة التغيرات التي تسببها الكميات المتغيرة كما نرى التغيرات في فروق التغير. بين شكل (1.14) كيف أن المبرمج السكاني لتأمين القاحلة تتكرر تحت التغير المتكرر في فترة ممتدة 50 عاماً. بين الرسم البياني الترميز المتكرر للتأمين في الفترة الزمنية المتقطعة. وحسب القاطع يمكن رسم خط مماس لمنحنى التغير في القاطع.



شكل (1.14)
لرسم البياني تحت الظروف المتغيرة
فصل القاطع

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

مثال (2): التماس في المنحنى

استخدم النقاط $(15, 40)$ ، $(23, 150)$ ، $(45, 340)$ في شكل (1.14) لحساب متوسط التغير وقطع القاطع (PQ).

الحل: يوجد 130 يوماً في اليوم 23، 340 يوماً في اليوم 45. هذا يعني زيادة $(45 - 23) = 22$ يوماً و $(340 - 150) = 190$ يوماً. في $(45 - 23) = 22$ يوماً.

23

من الدرس 1.1، نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).

من جميع الناحية نرى أن P قريباً من Q على المنحنى والقاطع PQ قريباً من خط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس. إذاً نحن نحاول رسم خط مماس على القاطع من P على المنحنى الذي نرى أنه قريب من الخط المماس AB الذي رسمناه في هذا الدرس.

الحل: $\frac{340 - 150}{45 - 23} = 17.5$ (زيادة يومياً).



شكل (1.14)
لرسم البياني تحت الظروف المتغيرة
فصل القاطع

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

الخط المماس
القاطع من خط مماس إلى المنحنى

6- الربط:

معادلة السقوط الحر لأي جسم على المريخ هي $s = 1.86 t^2$ حيث s تقاس بالتر و t بالثواني. لنفترض أن صخرة سقطت من ارتفاع 200m على أرض المريخ. أوجد سرعة الصخرة عند $t = 1 \text{ sec}$.

$$\begin{aligned} V(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(1+h) - s(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1.86(1+h)^2 - 1.86(1)^2}{h} = 3.72 \end{aligned}$$

فتكون سرعة الصخرة: 3.72 m/ sec

7- أخطاء شائعة:

كثير من الطلاب معرّضون للوقوع في أخطاء عند حساب ميل المنحنى أو عند إيجاد ميل المماس على منحنى. أكّد لهم أن استخدام قاعدة الميل هي لنقطة موجودة على المنحنى وليس لأي نقطة غير موجودة على المنحنى.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: 2-A، 5-A، 7-A، 9-A.
تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا جيداً معنى
معدلات التغير وميل المنحنى والتطبيق على السرعة في أوقات
محددة.

9- مسألة اليوم:

انطلق قطار من مدينة A متجهاً إلى مدينة B وفي الوقت نفسه انطلق قطار آخر من مدينة B متجهاً إلى مدينة A. يبلغ معدل سرعة أحد القطارين $\frac{3}{2}$ من معدل سرعة الآخر وتبلغ المسافة بين المدينتين 540 km. إذا التقيا بعد ساعتين فكم يكون معدل سرعة كل قطار؟ وما المسافة التي قطعها كل قطار؟

108 km ; 162 km

216 km ; 324 km

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 1-3

$$(1) \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{2(e - 1)}{5}$$

(2) الميل: 5 -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{5}{h-1}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{h-1} = -5$$

معادلة المماس: $y + 4 = -5(x - 2)$

$$y = -5x + 6$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (i) \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right) (\text{ب})$$

متوسط السعر في عدد الأيام X من يوم 23 إلى يوم 43 هو:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{140 - 120}{43 - 23} = \frac{190}{22} = 8.6 \text{ (دولار/يوم)}$$

أي أن في 8 دولارات في اليوم.

ومتوسط السعر هنا هو من القاطع بين القطعتين P ، Q في الشكل الرسوم. يمكننا حسابها على حالت القاطع PQ من جدول P .

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{140 - 120}{43 - 23} = \frac{190}{22} = 8.6 \text{ (دولار/يوم)}$$

ملاحظة:

إذا كانت $f(x) = y$ ونقطة x في مجال الدالة f فإن متوسط السعر في الدالة f عندنا سعر y من x_1 إلى x_2 يساوي ميل القاطع PQ بالخطتين $P(x_1, f(x_1))$ ، $Q(x_2, f(x_2))$ الوصلتين على منحنى الدالة.

أي أن ميل القاطع هو $\frac{\Delta Y}{\Delta x}$ حيث $x_2 \neq x_1$ و $\frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

شكل (1.11)

في الشكل (1.15) إذا تحركت النقطة Q على المنحنى متقاربة من النقطة P فإن القاطع PQ يصبح دائماً عندنا يكون Q قريباً جداً من P وهذا يحدث عندما $h \rightarrow 0$.

أي أن ميل القاطع يؤول إلى ميل المماس عند P ويكون ميل المماس منحنى الدالة عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x}$ (في حالة وجودها).

لذا رأينا في مثال (2) أن متوسط السعر لكل ميل الخط القاطع.

بالإضافة إلى معرفة متوسط السعر المسجل من يوم 23 إلى يوم 43 فإننا يمكننا معرفة كم مرة سرعة ترقى المسجدة في اليوم 23 نفسه. ولنعلم ذلك يمكن ملاحظة تغير ميل القاطع PQ (أي Q متحركاً) على المنحنى إلى أن يمكن رؤياً النتائج لأربعة مواضيع Q في شكل (1.16).

شكل (1.16)

إذا أربعة مواقع عندنا ثلاث الدالة

في شكل (1.16) نرى في الخط

$P(23, 120)$

إذا من كل موقع ثلاث

Q	سرعة $PQ =$ متوسط السرعة
$Q_1(43, 140)$	$\frac{140 - 120}{43 - 23} = 25 \times 8.6 = 215$
$Q_2(38, 135)$	$\frac{135 - 120}{38 - 23} = 25 \times 6.0 = 150$
$Q_3(33, 130)$	$\frac{130 - 120}{33 - 23} = 25 \times 1.1 = 27.5$
$Q_4(28, 125)$	$\frac{125 - 120}{28 - 23} = 25 \times 1.0 = 25$

(أ)

(ب)

الوحدة الأولى

شكل 1.18
ميل المنحنى هو
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

نكتباً ميل المماس عند النهاية لنصل عندما نقارب Q من P على المنحنى.

ميل المماس: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+4)^2 - 4}{4} = 4^2 + 4(4) + 4 - 4 = 4^2 + 4(4) = 8 + 4$

هناك ميل المماس عندما نقارب Q من P على المنحنى هو

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 4) = 8$

وهي ثابت يكون ميل المماس للقطع التكاملي عند P هو 8.

وبمعادلة المماس للقطع التكاملي عند $P(2, 4)$ التي ميله 8، نحصل

$y - 4 = 8(x - 2)$
 $y = 4x - 8 + 4$
 $y = 4x - 4$

2. أوجد ميلاً لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$ عند النقطة $E(2, -4)$ ، ثم أوجد معادلة المماس عند تلك النقطة.

ميل المنحنى

لأوجد ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(a, f(a))$ باستخدام الطريقة عندما نحسب ميل المماس للمنحنى عند النقطة P والنقطة $Q(a+h, f(a+h))$ ونبحث النهاية لنصل عندما $h \rightarrow 0$ (شكل 1.18). إذا كانت النهاية موجودة فإنها تكون ميل المنحنى عند P والمماس عند P هو الخط المماس للنقطة P ولذا كانت النتيجة

تعريف: ميل المنحنى عند النقطة

ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو النهاية

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

الوحدة الأولى

شكل 1.19
ميل المنحنى هو
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

نكتباً ميل المماس عند النهاية لنصل عندما نقارب Q من P على المنحنى.

ميل المماس: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+4)^2 - 4}{4} = 4^2 + 4(4) + 4 - 4 = 4^2 + 4(4) = 8 + 4$

هناك ميل المماس عندما نقارب Q من P على المنحنى هو

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 4) = 8$

وهي ثابت يكون ميل المماس للقطع التكاملي عند P هو 8.

وبمعادلة المماس للقطع التكاملي عند $P(2, 4)$ التي ميله 8، نحصل

$y - 4 = 8(x - 2)$
 $y = 4x - 8 + 4$
 $y = 4x - 4$

2. أوجد ميلاً لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$ عند النقطة $E(2, -4)$ ، ثم أوجد معادلة المماس عند تلك النقطة.

ميل المنحنى

لأوجد ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(a, f(a))$ باستخدام الطريقة عندما نحسب ميل المماس للمنحنى عند النقطة P والنقطة $Q(a+h, f(a+h))$ ونبحث النهاية لنصل عندما $h \rightarrow 0$ (شكل 1.18). إذا كانت النهاية موجودة فإنها تكون ميل المنحنى عند P والمماس عند P هو الخط المماس للنقطة P ولذا كانت النتيجة

تعريف: ميل المنحنى عند النقطة

ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو النهاية

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

الوحدة الأولى

شكل 1.19
ميل المنحنى هو
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

نكتباً ميل المماس عند النهاية لنصل عندما نقارب Q من P على المنحنى.

ميل المماس: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+4)^2 - 4}{4} = 4^2 + 4(4) + 4 - 4 = 4^2 + 4(4) = 8 + 4$

هناك ميل المماس عندما نقارب Q من P على المنحنى هو

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + 4) = 8$

وهي ثابت يكون ميل المماس للقطع التكاملي عند P هو 8.

وبمعادلة المماس للقطع التكاملي عند $P(2, 4)$ التي ميله 8، نحصل

$y - 4 = 8(x - 2)$
 $y = 4x - 8 + 4$
 $y = 4x - 4$

2. أوجد ميلاً لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$ عند النقطة $E(2, -4)$ ، ثم أوجد معادلة المماس عند تلك النقطة.

ميل المنحنى

لأوجد ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(a, f(a))$ باستخدام الطريقة عندما نحسب ميل المماس للمنحنى عند النقطة P والنقطة $Q(a+h, f(a+h))$ ونبحث النهاية لنصل عندما $h \rightarrow 0$ (شكل 1.18). إذا كانت النهاية موجودة فإنها تكون ميل المنحنى عند P والمماس عند P هو الخط المماس للنقطة P ولذا كانت النتيجة

تعريف: ميل المنحنى عند النقطة

ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو النهاية

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

(ج) يقترب الميل من الصفر ويصبح المماس قريباً من الوضع الأفقي.

$$(4) y = -4x + 18$$

$$(5) 128 \text{ ft/s}$$

اختبار الوحدة

إجابات اختبار الوحدة الأولى

$$(1) (a) 2$$

$$(b) -1$$

(c) لا يوجد

$$(d) -1$$

$$(2) -57$$

$$(3) (a)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (5 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (5 + x^2) = 5;$$

$$5 - x^2 \leq 5 - x^2 \cos \frac{1}{x} \leq 5 + x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 5$$

إذن

نظرية (1): خواص النهايات

إذا كانت L, M, c أعداداً حقيقية، $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ ، $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، فإن:

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M \quad (1) \text{ قاعدة الجمع:}$$

نهاية مجموع دالتين هي مجموع نهايتهما.

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M \quad (2) \text{ قاعدة الفرق:}$$

نهاية الفرق بين دالتين هي الفرق بين نهايتهما.

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \quad (3) \text{ قاعدة الضرب:}$$

نهاية حاصل ضرب دالتين هي حاصل ضرب نهايتهما.

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L \quad (4) \text{ قاعدة الضرب في ثابت:}$$

نهاية ثابت مضروب في دالة هي حاصل ضرب ثابت في نهاية الدالة.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0 \quad (5) \text{ قاعدة ناتج القسمة:}$$

نهاية ناتج قسمة دالتين هي ناتج قسمة نهايتهما بشرط ألا تساوي نهاية المقام صفرًا.

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x))^n = L^n \quad (6) \text{ قاعدة القوى: إذا كان } c \text{ عددين صحيحين، } c \neq 0$$

على شرط أن L عدد حقيقي.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ نهاية دالة جهة اليسار}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ نهاية دالة جهة اليمين}$$

نظرية النهاية من جهة واحد أو من الجهتين:

الدالة $f(x)$ لها نهاية عندما تقترب x من c إذا كانت وقطعت إذا كانت النهاية اليمنى والنهاية اليسرى للدالة عند c موجودتين، وكناتهما تكونان متساويتين.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ و } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

نظرية الإحاطة:

تتعلق هذه النظرية بدالة f قيمها بين قيم دالتين أخريين g, h . إذا كان للدالتين g, h النهاية نفسها عندما $x \rightarrow c$ فإن للدالة f أيضًا هذه النهاية.

تعريف: الاتصال عند نقطة

نقطة داخلية: تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة داخلية c في مجالها إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

نقطة طرفية (حدية): تكون الدالة $y = f(x)$ متصلة عند نقطة طرفية لها نهاية من جهة اليمين a أو نقطة طرفية b لها نهاية من جهة اليسار مجالها إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ أو } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

إذا كانت الدالة f غير متصلة عند نقطة c فنعبر عن ذلك بأن f غير متصلة عند c ، c هي نقطة انفصال للدالة f مع ملاحظة أن c ليست بحاجة إلى أن تكون في مجال f .
تكون الدالة متصلة على فترة إذا، فقط إذا كانت متصلة عند جميع نقاط الفترة.

خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f و g دالتين متصلتين عند c فإن التوافقات التالية للدوال هي دوال متصلة عند $x = c$

$$(1) \text{ الجمع: } f + g$$

$$(2) \text{ الطرح: } f - g$$

$$(3) \text{ الضرب: } f \cdot g$$

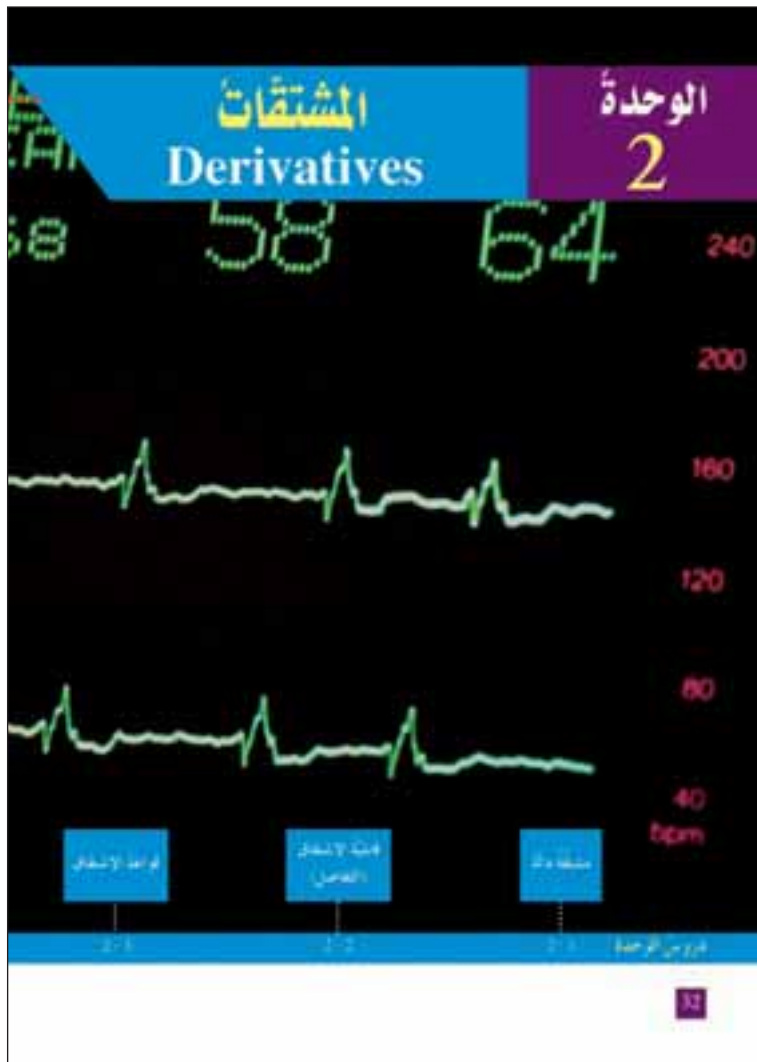
$$(4) \text{ الضرب في ثابت: } k \cdot f \text{ حيث } k \text{ أي عدد}$$

$$(5) \text{ ناتج القسمة: } f/g \text{ بشرط } g(c) \neq 0$$

– متوسط التغير للدالة على فترة، هو قيمة ذلك التغير مقسوماً على طول تلك الفترة.

– ميل المماس للدالة f في نقطة $x = a$ هو: $m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ إذا وجدت.

– الخط العمودي على مماس عند نقطة معينة هو الخط العمودي على المماس للمماس عند تلك النقطة.



لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسمت هذه الوحدة إلى 5 دروس على النحو الآتي:

2-1 مشتقة دالة (ص 38-34)

المصطلحات الأساسية: مشتقة الدالة، دالة قابلة للتفاضل، مشتقة من جهة واحدة.

2-2 قابلية الاشتقاق (التفاضل) (ص 41-39)

المصطلحات الأساسية: قابلية الاشتقاق.

2-3 قواعد الاشتقاق (ص 49-42)

المصطلحات الأساسية: مشتقة الدالة الثابتة، قاعدة القوى للأسس، قاعدة الضرب بعدد ثابت، مشتقات ذات رتب عليا، قاعدة الجمع والطرح، قاعدة الضرب.

2-4 مشتقات الدوال المثلثية (ص 56-50)

المصطلحات الأساسية: مشتقة دالة الجيب وجيب التمام.

2-5 قاعدة السلسلة (ص 65-57)

المصطلحات الأساسية: مشتقة دالة الدالة، قاعدة السلسلة، الاشتقاق من الخارج إلى الداخل، ميل المنحنيات البارامترية، الاشتقاق الضمني.

ماذا سيتعلم الطلاب؟
ولماذا؟

يتعرف الطلاب في هذه الوحدة مشتقة الدالة من الرتبة الأولى والمشتقات ذات الرتب العليا، كما أنه يتعرف مشتقات الدوال المثلثية وقاعدة السلسلة والمشتقة من جهة واحدة أو من جهتين.

مشروع الوحدة
عرض المشروع:

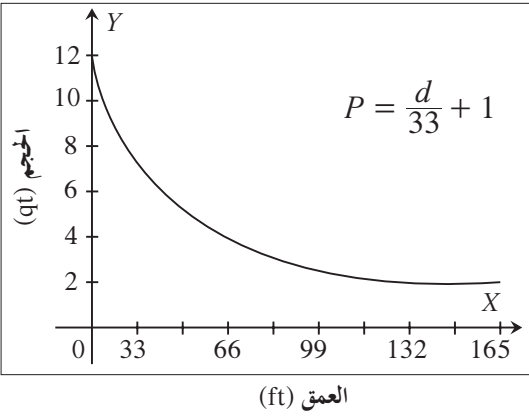
اسأل الطلاب إذا كانت لديهم معلومات عن الغطس. اشرح لهم أن حجم الهواء في الرئتين يتزايد عندما يصعد الغطاس إلى سطح الماء. إذا صعد الغطاس بسرعة كبيرة فإن الفقاعات الغازية حول الجسم تحدث تصلباً في العضلات.

اسأل الطلاب كيف أن الرسم البياني للمسافة تحت الماء يبين حجم الهواء في الرئتين.

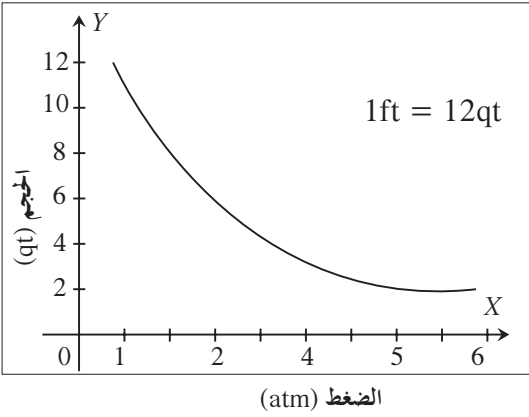
- سلم التقييم:
- 4- الحسابات كلها صحيحة. الرسوم البيانية واضحة ودقيقة وتبين العلاقة بين المتغيرات. الشروحات واضحة وكاملة. الملصق واضح ودقيق.
- 3- الحسابات في معظمها صحيحة. الرسوم البيانية في معظمها واضحة ودقيقة مع بعض الأخطاء الخفيفة. الشروحات غير كاملة. الملصق ينقصه بعض الدقة.
- 2- الحسابات تحتوي على أخطاء متعددة. الرسوم البيانية غير دقيقة. الملصق غير واضح أو ينقصه معلومات.
- 1- معظم عناصر هذا المشروع غير كاملة أو ناقصة.

إجابات مشروع الوحدة:

الحجم (qt)	العمق (ft)
12	0
6	33
4	66
3	99
2.4	132
2	165



الحجم (qt)	الضغط (atm)
12	1
6	2
4	3
3	4
2	6



إجابة ممكنة:

يستمر الغطاسون في التنفس طيلة صعودهم ليمنعوا انتشار الهواء في رئتيهم والتسبب في الأذى.

العمق (ft)	الضغط (atm)	الحجم (qt)
0	1	60
10	1.30	46
20	1.61	37.4
33	2	30
40	2.21	27.1
50	2.51	23.9
66	3	20
99	4	15



2-1 مشتقة دالة

Derivative of a Function

دعنا نذكر وسائل

تعريف المشتقة

نعتبر أن ميل منحنى $y = f(x)$ عند نقطة إحداثياتها السينية $x = a$ هو كالتالي:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنها تسمى **مشتقة الدالة f عند a** . في هذا الدرس، سوف نتعرف على المشتقة كدالة مستخلصة من الدالة مع اعتبار النهاية عند كل نقطة في مجال f .

تعريف (بديل): المشتقة عند نقطة

مشتقة دالة f عند نقطة $x = a$ هي النهاية:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1)$$

بشرط وجود النهاية.

نطبق التعريف البديل

أوجد تفاضل $f(x) = \sqrt{x}$ باستخدام التعريف البديل.

الحل

عند النقطة $x = a$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$$

دالة (1) حيث $f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

مرتبطة بالنسبة والمقام يتكامل $(\sqrt{x} + \sqrt{a})$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

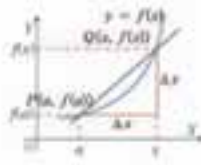
1 أوجد تفاضل $f(x) = \frac{1}{x}$ عند النقطة $x = 2$.

تعريف: الدالة المشتقة

مشتقة الدالة f بالنسبة إلى المتغير x هي الدالة f' التي قيمتها عند x هي:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

بشرط وجود النهاية.



شكل (2.1)

ميل الخط الواصل PQ من

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1- الأهداف:

- يكون الطلاب قادرين على إيجاد الميول والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- يكون الطلاب قادرين على رسم منحنى الدالة f اعتماداً على منحنى الدالة f' وبالعكس.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

المشتقة، رموز المشتقة، منحنى الدالة f ومنحنى الدالة f' ، الاشتقاق من جهة واحدة.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب، قلم رصاص.

4- التمهيد:

اطلب إلى الطلاب إيجاد:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 4} = -\frac{1}{3}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{1}{6}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$

5- التدريس:

إن إحدى الطرائق المفيدة لبداية هذا الدرس تتم بتقديم الرسم البياني لدالة، وبيان كيف أن ميل خطوط القاطع يقترب من نهاية تناظر ميل خط المماس.

ينبغي أن يتعلم الطلاب كيف يُوجدون المشتقات باستخدام التعريف. ويمكن عمل هذا على مرحلتين:

(1) إيجاد المشتقة عند نقطة معينة $x = a$.

(2) تعميم العملية لإيجاد المشتقة عند نقطة عامة x .

ينبغي أن تناقش الطرق المختلفة لكتابة المشتقات.

يمكن إنهاء الدرس بمناقشة المشتقات من جهة واحدة. عند مناقشة مشتقات من جهة واحدة لدالة معرفة بقاعدة متفرعة مثل الدالة في مثال (5)، أكد أنك توجد قيمة المشتقات من جهة اليسار ومن جهة اليمين لدالة واحدة (وليس لدالتين).

6- الربط:

التمرين رقم 8-A يتناول عدد الأرناب وعدد الثعالب في القطب المتجمد والعلاقة بين المنحنيات التي تمثل كل نوع.

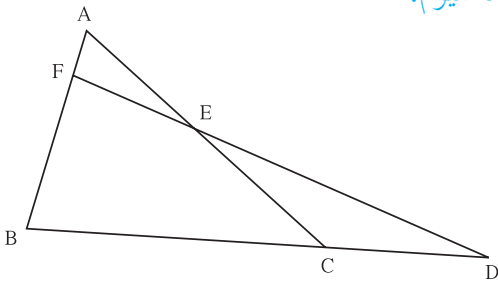
7- أخطاء شائعة:

عند إيجاد مشتقات باستخدام التعريف، غالباً ما يقع الطلاب في أخطاء عند تقييم وتبسيط البسط الخاص بنتائج قسمة الفرق. عندما تكون $f(x)$ كثيرة حدود أو دالة نسبية، فإن (و) تكون دائماً عاملاً/للمقدار الذي جرى تبسيطه.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: 2-A، 4-A، 5-A، 6-A، 7-A، 8-A. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد تفهموا العلاقة بين منحنيات f و f' .

9- مسألة اليوم:



لدينا: $\frac{DC}{DB} = \frac{2}{3}$
 E منتصف AC و $\overline{DE}$ يقطع $\overline{AB}$ عند F .
 أوجد قيمة: $\frac{AF}{AB}$

نأخذ من C خطاً موازياً لـ $\overline{AB}$ ونجد: $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{5}$

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 2-1

$$(1) f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \dots$$

$$f'(2) = -\frac{1}{4}$$

$$(2) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \dots$$

$$f'(x) = 2x$$

مثال 3: هو مجموعة النقاط في مجال f التي يكون فيها لهذه النهاية وجود، فذا يكون لكل من مجال f إذا كان $f'(x)$ لها وجود، فذا نقول إن لها مشتقة (قابلة للاشتقاق) عند x . الدالة القابلة للاشتقاق عند كل نقطة تنتمي إلى مجالها من دالة قابلة للاشتقاق (تفاضل).

في مثال (1) السابق إذا وضعنا x بدلاً من a في $f'(a)$ فذا نحصل على الدالة المشتقة $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ حيث يمكن تطبيقها لإيجاد قيمة المشتقة عند أي عدد في مجالها $(0, \infty)$.

مثال (2): تطبيق التعريف

أوجد المشتقة (أي أوجد تفاضلاً) للدالة $f(x) = x^3$.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2$$

لوجد المشتقة (أي أوجد تفاضلاً) للدالة $f(x) = x^3$.

نحصل على مشتقة $f(x)$ عند نقطة لها $x = a$ بأخذ النهاية عندما تقرب h من الصفر ($h \rightarrow 0$) لـ $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ كما في الشكل (2.2).

رموز المشتقة:

هناك عدد من الطرق لتعبّر عن مشتقة دالة $y = f(x)$ إلى جانب $f'(x)$ ، إن أكثر الرموز انتشاراً هي الآتية:

y'	وتقرأ	مشتقة y
$\frac{dy}{dx}$	وتقرأ	أو مشتقة y بدلالة x
$\frac{df}{dx}$	وتقرأ	أو مشتقة f بدلالة x
$\frac{d}{dx}f(x)$	وتقرأ	أو مشتقة f عند x

العلاقات بين الرسوم البيانية للدالة f ومشتقتها f'

عندما يكون لدينا القانون (القاعدة) للدالة $f(x)$ نستطيع أن نجد قانوناً للمشتقة $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة كما في المثالين (1) و (2) السابقين، ومع ذلك فإن الدالتين f و f' يمكن أن ترافعا بصور أخرى، صور بيانية على سبيل المثال، أو بشكل جدول من البيانات. لأنه يمكننا أن نعكس في المشتقة عند نقطة بالرسم البياني على أنها «مين» فإنه يمكننا أن نحصل على فكرة جيدة عما يكون عليه الرسم البياني للدالة f عن طريق تقدير «التيول» عند نقاط مختلفة على الرسم البياني للدالة f' .

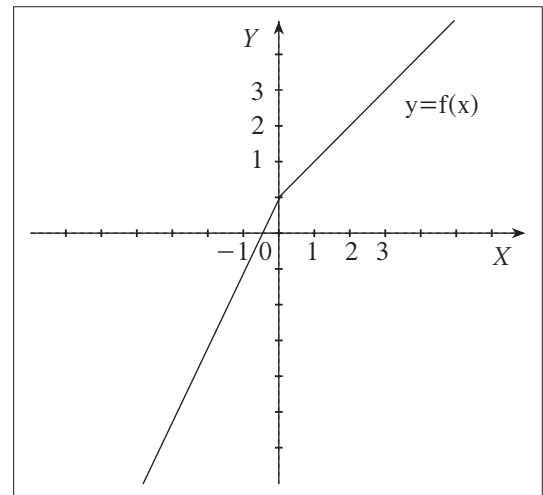
ملاحظات على الأمثلة

- في مثال (1): يوجد قيمة مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{x}$. يتطلب الاشتقاق إيجاد عامل مشترك بين البسط والمقام لتبسيط الكسر وإيجاد النهاية.
- مثال (3) يبين بصرياً العلاقة بين الرسوم البيانية لكل من f و f' .
- مثال (4) يبين كيفية الرسم البياني للدالة بمعرفة مشتقتها.
- مثال (5) يبين كيفية حساب قيم مشتقات مباشرة من بيانات في قاعدة متفرعة.

توسعات استكشافية

استكشاف (1): استخدم قلم رصاص وورقة لنسخ الرسوم البيانية في شكل (2.3). ارسم مخططاً يمثل استمراراً ممكناً للدالة $f(x)$ لتمثيل الأيام الخمسة التالية. ثم استخدم هذه الطريقة في مثال (3) للرسم البياني للاستمرار المناظر للمشتقة $f'(x)$. استخدم رسوماتك البيانية لوصف ما حدث للماء في الحفرة على مدى فترة الأيام الخمسة.

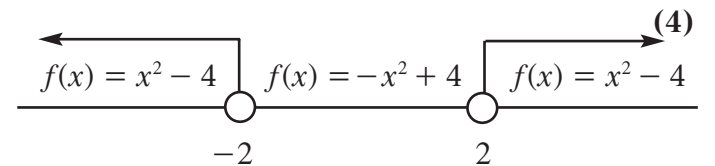
(3)



– f دالة متصلة في النقطة $(0, 1)$

– على يسار $x = 0$ الرسم البياني للدالة f له ميل ثابت قدره 3 إذاً هو مستقيم ميله 3 يمر بالنقطة $(0, 1)$ و موازٍ للمستقيم $y = 3x$

– على يمين $x = 0$ الرسم البياني للدالة f له ميل ثابت قدره 1 إذاً هو مستقيم ميله 1 يمر بالنقطة $(0, 1)$ و موازٍ للمستقيم $y = x$



$$f'(-2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-2+h)^2 - 4 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(-2+h)^2 + 4 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 4h}{h} = +4$$

لا توجد مشتقة عند $x = -2$

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 4h}{h} = -4$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 + 4h}{h} = 4$$

لا توجد مشتقة عند $x = 2$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 2-2

(1) نعم

(2) لا

(3) نعم

(4) نعم

(5) لا

(6) 3.2

(7) 5

حل (3) رسم البياني للمنطقة f من النقطة f

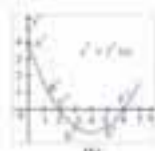
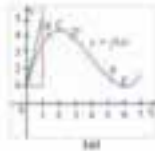
رسم بياني لمنطقة الدالة f التي رسمها البياني في شكل (2.3.3)، نلاحظ من شكل (2.3.3) أن:

نلاحظ:

* رسم البياني f واحد الجانب وبتدرج اللون الأحمر، الوحدات xx والوحدات yy برسم البياني.

نلاحظ البياني في شكل (2.3.3).

* نلاحظ من البياني f أن الدالة f لها ميل ثابت قدره 3 على يسار $x = 0$ و ميل ثابت قدره 1 على يمين $x = 0$.



شكل (2.3.3)

نلاحظ من البياني f أن الدالة f لها ميل ثابت قدره 3 على يسار $x = 0$ و ميل ثابت قدره 1 على يمين $x = 0$.

الاستنتاج (1): قواعد الرسم البياني

نلاحظ من البياني f أن الدالة f لها ميل ثابت قدره 3 على يسار $x = 0$ و ميل ثابت قدره 1 على يمين $x = 0$.

(1) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(2) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(3) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(4) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(5) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(6) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(7) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(8) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(9) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(10) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(11) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(12) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(13) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(14) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(15) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(16) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(17) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(18) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(19) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(20) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(21) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(22) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(23) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(24) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(25) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(26) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(27) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(28) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(29) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

(30) إذا كان f دالة متصلة في النقطة $(a, f(a))$ ، فإن الرسم البياني f يكون متصلاً في النقطة $(a, f(a))$.

2-2 قابلية الاشتقاق (التفاضل)

1- الأهداف:

- يكون الطلاب قادرين على إيجاد النقاط حيث إن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق والتمييز بين الأركان والأنياب والانفصالات والمماسات العمودية على المنحنيات.
- يكون الطلاب قادرين على إيجاد القيم التقريبية للمشتقات حسابياً وبيانياً.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

عدم وجود المشتقة عند نقطة ما، الاشتقاق يعطي اتصالاً.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(أ) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x > 0$ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ب) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x < 0$ $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(ج) أوجد: $f(0)$ ، $f(0^-)$ ، $f(0^+)$

ماذا تستنتج؟ $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 3$

إذا الدالة متصلة عند $x = 0$

(د) أوجد: (-4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

ماذا تستنتج؟ $-4 \neq 4$

وبالتالي ليس لها النهاية نفسها.

5- التدريس:

يمكنك أن تقدم هذا الدرس بمناقشة رسم بياني عن معنى أن تكون دالة قابلة أو غير قابلة للاشتقاق عند نقطة. أعط أمثلة عديدة لتوضح الأركان والأنياب (نقاط التقاء قوسين) والمماسات الرأسية وعدم الاتصال.

2-2 قابلية الاشتقاق (التفاضل)

أهداف التعلم:

- أن يكون الطلاب قادرين على إيجاد النقاط حيث إن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق والتمييز بين الأركان والأنياب والانفصالات والمماسات العمودية على المنحنيات.
- أن يكون الطلاب قادرين على إيجاد القيم التقريبية للمشتقات حسابياً وبيانياً.

المفردات والمفاهيم الجديدة:

عدم وجود المشتقة عند نقطة ما، الاشتقاق يعطي اتصالاً.

الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(أ) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x > 0$ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ب) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x < 0$ $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(ج) أوجد: $f(0)$ ، $f(0^-)$ ، $f(0^+)$

ماذا تستنتج؟ $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 3$

إذا الدالة متصلة عند $x = 0$

(د) أوجد: (-4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

ماذا تستنتج؟ $-4 \neq 4$

وبالتالي ليس لها النهاية نفسها.

2-2 قابلية الاشتقاق (التفاضل)

أهداف التعلم:

- أن يكون الطلاب قادرين على إيجاد النقاط حيث إن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق والتمييز بين الأركان والأنياب والانفصالات والمماسات العمودية على المنحنيات.
- أن يكون الطلاب قادرين على إيجاد القيم التقريبية للمشتقات حسابياً وبيانياً.

المفردات والمفاهيم الجديدة:

عدم وجود المشتقة عند نقطة ما، الاشتقاق يعطي اتصالاً.

الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(أ) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x > 0$ $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ب) أوجد تعريف $f(x)$ لكل $x < 0$ $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(ج) أوجد: $f(0)$ ، $f(0^-)$ ، $f(0^+)$

ماذا تستنتج؟ $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 3$

إذا الدالة متصلة عند $x = 0$

(د) أوجد: (-4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

ماذا تستنتج؟ $-4 \neq 4$

وبالتالي ليس لها النهاية نفسها.

6- الربط:

لا يوجد.

7- أخطاء شائعة:

ينبغي أن يعرف الطلاب متى تفشل $f'(a)$ في أن يكون لها وجود. فمثلاً، لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + 4, & x > 2 \end{cases}$$

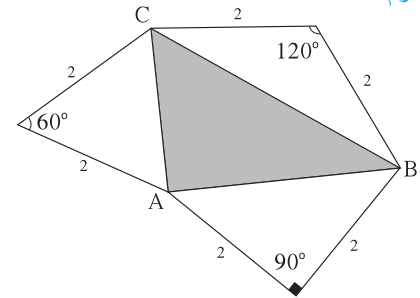
لاحظ أن f ليست متصلة عند $x = 2$ ، لذلك فإن $f'(2)$ ليس لها وجود.

أكد أن التقنيات الحديثة تجعل معرفة متى توجد المشتقة عند نقطة، أكثر سهولة من أي وقت مضى.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حلّ التمارين 1-A، 3-A، 5-A، 8-A. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا معنى الاشتقاق لجهة اليمين أو اليسار لنقطة معينة.

9- مسألة اليوم:



أثبت أن المثلث ABC هو قائم الزاوية في A .

$$AB^2 = 4 + 4 = 8$$

$$AC^2 = (2)^2 = 4$$

$$BC^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

نجد أن:

$$AB^2 + AC^2 = 8 + 4 = 12$$

$$BC^2 = 12$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

إذاً: ABC هو مثلث قائم الزاوية في A .

(a) عدم الاتصال: وتكون فيها المشتقة من جهة واحدة أو كل من الجهتين غير موجودة. مثالاً: دالة الخطوة الواحدة (الدرجة الواحدة)



شكل (2.11)

وجد عدم الاتصال عند $x = 0$ ، حيث $f'(0)$ غير موجودة.

في هذا المثال المشتقة من جهة اليسار غير موجودة:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2}{h} = \infty$$

سوف نثبت بعد ذلك، نظرياً نقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند نقطة a كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند هذه النقطة a ، وسوف نستخدم هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

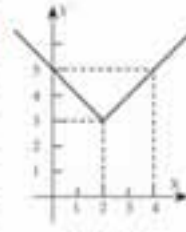


نلاحظ أن لا تكون الدالة قابلة للاشتقاق.

مثال (1)

أوجد كل النقاط في مجال الدالة $f(x) = |x - 2| + 3$ حيث تكون f غير قابلة للاشتقاق.

نذكر في الرسم البياني: الرسم البياني لهذه الدالة هو رسم الدالة $y = |x|$ مع إزاحة وحدتين إلى اليمين، ثلاث وحدات إلى أعلى (انظر الشكل المجاور). هذا يجعل الركن يقع عند النقطة $(2, 3)$ ، لذلك فإن هذه الدالة لا تكون قابلة للاشتقاق عند $x = 2$. عند كل نقطة أخرى، يكون الرسم البياني خطاً مستقيماً، وتكون الدالة لها مشتقة 1 أو -1 (تماماً كما هو الحال في $y = |x|$).

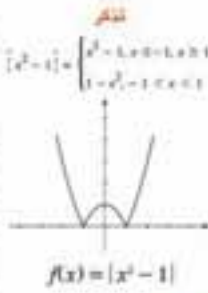


شكل (2.12)

$$f(x) = |x - 2| + 3$$

أوجد كل النقاط في مجال الدالة $f(x) = |x^2 - 1|$ حيث تكون f غير قابلة للاشتقاق.

معظم الدوال التي سعالها قابلة للاشتقاق حيثما تكون معرفة، هذا يعني أنه سوف لا يكون لها ركن أو ثقب أو مماسات عمودية أو نقاط عدم الاتصال في مجالاتها، وسوف تكون رسوماتها البيانية غير متكررة، ولها ميل معروف عند كل نقطة. كميات الحدود قابلة للاشتقاق، كذلك الدوال السية والدوال التلقية والدوال الأسية واللوغاريتمية. كذلك دوال مجموع وحاصل ضرب دوال قابلة للاشتقاق تكون قابلة للاشتقاق. أيضاً دوال القوى ذات الأس الصحيحة. وسوف نرى السبب في أن كل ذلك صحيح فيما يلي من هذه المحاضرة.

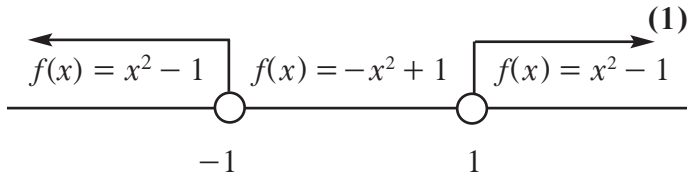


$$f(x) = |x^2 - 1|$$

40

10- إجابات وحلول:

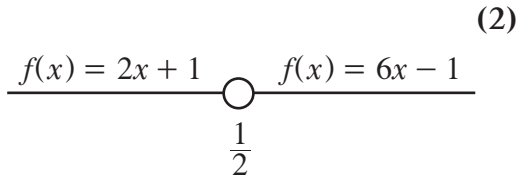
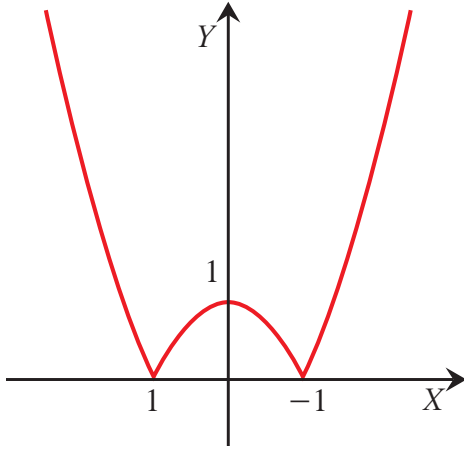
إجابات التمارين في سياق الدرس 2-2



f غير قابلة للاشتقاق في $x = 1$ و $x = -1$ لأن:

$$f'(-1^-) = -2; f'(-1^+) = 2$$

$$f'(1^-) = -2; f'(1^+) = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

إذاً f متصلة عند $x = \frac{1}{2}$

$$f'\left(\frac{1}{2}^-\right) = 2; f'\left(\frac{1}{2}^+\right) = 6$$

إذاً f غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$

إجابات التمارين التمهيديّة للدرس 2-3

(1) (a) 7

(b) 7

(c) 7

(d) 0

(2) (a) $\frac{1}{\pi}$

(b) $-\frac{\pi}{x^2}$

القدرة الاشتقاقية تستلزم الاتصال

يبدأ هذا الجزء بالنظر على الطرق المعتادة التي يمكن أن نقول في أن تكون فيها للدالة مشتقة عند نقطة. كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيدينا أن عدم الاتصال في الرسم البياني للدالة f قد يستلزم عدم وجود مشتقة أحادية الجانب أو ثنائية الجانب. وفي الحقيقة فإننا ليس صعباً إعطاء برهان تحليلي على أن الاتصال شرطاً جوهرياً لإمكانية وجود المشتقة، لذلك سنبحث هذا كطريقة هنا.

نظرية (1): القدرة الاشتقاقية تستلزم الاتصال

إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة $x = a$ ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

البرهان

علينا أن نثبت أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ، أو، مكافئاً لذلك، أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أن $x - a \neq 0$)، نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \left[(x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= 0 \cdot f'(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

معكوس النظرية (1) ليس صحيحاً، كما رأينا سابقاً. الدالة المتصلة قد يكون لها زكن لو نأب أو تماس عمودي، ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.

(2) ليكن $f(x) = |2x - 1| + 4x$. نثبت أن f متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{1}{2}$.

قانون التفاضل للدرس 2-3

(1) إذا كان $f(x) = 7$ لجميع قيم x الحقيقية، أوجد:

(a) $f(10)$

(b) $f'(0)$

(c) $f(x + h)$

(d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

(2) أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدماً تعريف المشتقة:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x}$

1- الأهداف:

- يكون الطلاب قادرين على استخدام قواعد التفاضل لإيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة x^n حيث n عدد صحيح،
مشتقة الضرب والجمع والفرق وناتج القسمة،
المشتقة من الرتبة الثانية والرتب العليا.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

أوجد عوامل التعابير الجبرية:

- (a) $x^2 - y^2$ $(x - y)(x + y)$
(b) $x^3 - y^3$ $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
(c) $x^4 - y^4$ $(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$
(d) $x^5 - y^5$ $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

5- التدريس:

إحدى الطرائق لبدء هذا الدرس هي مناقشة مشتقات دوال خطية. ينبغي أن يفهم الطلاب بسهولة هذه المناقشة، والنتائج هي أمثلة جيدة لبيان أن قاعدة الأسس (القوى) صحيحة. بنهاية هذا الدرس، ينبغي أن يكون الطلاب قادرين على اشتقاق كل الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.

تَعَلَّم قواعد الاشتقاق واستخداماتها الصحيحة أمر مهم وأساسي لما يتبع، بما في ذلك عملية تطبيقات المشتقات. قد ترغب في اقتراح تعلم الطلاب القاعدة الآتية كعينة للتذكر:

$$\text{تفاضل} \left(\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} \right) = \frac{\text{البسط} \times \text{تفاضل المقام} - \text{المقام} \times \text{تفاضل البسط}}{\text{المقام}^2}$$

المقام $\times$ تفاضل البسط - البسط $\times$ تفاضل المقام

مربع المقام

(حيث تفاضل يعني مشتقة).

موضوعات لتعلم

- مشتقات
- الدوال المتعددة الحدود
- الدوال في حد ذاتها
- الدوال الكسرية
- الدوال الجذرية
- الدوال المثلثية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية

2-3 قواعد الاشتقاق

Chapter 3: Differentiation

1- مقدمة

تعتبر إيجاد مشتقة الدالة $f(x)$ باستخدام تعريف المشتقة، ربما يكون هذا مهلاً لبعض الدوال، ولكن إذا لم أرنا إيجاد مشتقة الدالة $f(x) = e^x$ مستخرجاً من هذا السؤال فربما الاشتقاق الشئ وسيرة برأين هذه القواعد الثلاث في العلم الثاني.

القوى الصحيحة الموجبة، والدوال الجذرية واللوغاريتمية.

الدوال الأسية، الدوال اللوغاريتمية، الدوال المثلثية.

قاعدة (1): مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة حيث $f(x) = c$ فإن $f'(x) = 0$.

البرهان

إذا كانت $f(x) = c$ حيث c ثابتة فإن:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(1) أي مشتقة $f(x)$ هي 0 في الحالات التالية:

- (a) $f(x) = 5$
(b) $f(x) = 2x^2$
(c) $f(x) = 2x^3$

الدالة الآتية هي الخطوة الأولى نحو الاشتقاق أي كثيرة حدود.

قاعدة (2): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للعدد x

Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$.

البرهان

إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f(x+h) = (x+h)^n$.

وكون n ناتج قسمة القوى n من x^n فإن:

وإذا كان n عدداً صحيحاً موجباً $n \geq 1$ ، باستخدام الصيغة الثنائية:

$$(x+h)^n = (x+h)^{n-1}(x+h) = (x+h)^{n-1}x + (x+h)^{n-1}h$$

حيث n عدد صحيح موجب.

وبما أن $n \geq 1$ فإن $n-1 \geq 0$ ، أي $(x+h)^{n-1}$ هو دالة كثيرة حدود.

باعتبار $g(x) = (x+h)^{n-1}$ في السطر والسطر نحصل على:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h)^{n-1}x + (x+h)^{n-1}h - x^n}{h}$$

$$= \frac{x(x+h)^{n-1} + h(x+h)^{n-1} - x^n}{h} = \frac{x(x+h)^{n-1} - x^n + h(x+h)^{n-1}}{h}$$

$$= \frac{x(x+h)^{n-1} - x^n}{h} + (x+h)^{n-1}$$

43

حل (1)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = 3x^2 + 4x^3 - \frac{2}{3}x + 18$.

الحل

باستخدام قاعدة (2) نوجد مشتقة كثيرة الحدود حداً بعد حد. تطبيق القواعد (1، 2، 3):

البرهان

باعتبار $f(x) = 3x^2 + 4x^3 - \frac{2}{3}x + 18$ فإن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(3x^2 + 4x^3 - \frac{2}{3}x + 18 \right) = \frac{d}{dx} (3x^2) + \frac{d}{dx} (4x^3) - \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3}x \right) + \frac{d}{dx} (18)$$

$$= 6x + 12x^2 - \frac{2}{3} + 0 = 6x + 12x^2 - \frac{2}{3}$$

$$= 6x + 12x^2 - \frac{2}{3}$$

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6$.

برهان في الوحدة الأولى أن مشتق الدالة $f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (في حالة وجودها). وعلمت في هذه الوحدة أن هذه النهاية هي مشتقة الدالة عند النقطة $(a, f(a))$.

وعبرنا عن مشتق الدالة $f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ بأن $f'(a)$ (في حالة وجودها).

حل (2)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ أي $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$ أي $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7$.

الحل

المشتقات الآتية: إذا وجدت مشتقة عند $x=0$ فإن $f'(0) = 0$ أي $f'(0) = 0$ أي $f'(0) = 0$ أي $f'(0) = 0$.

البرهان

$$\frac{d}{dx} (2x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = \frac{d}{dx} (2x^3) - \frac{d}{dx} (3x^2) + \frac{d}{dx} (5x) - \frac{d}{dx} (7)$$

$$= 6x^2 - 6x + 5 - 0 = 6x^2 - 6x + 5$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$6x^2 - 6x + 5 = 0$$

44

6- الربط:

رد فعل جسم الإنسان لجرعة من الدواء يعطى غالباً بالمعادلة:

$$R = M^2 \left(\frac{c}{2} - \frac{M}{3} \right)$$

الدواء الممتصة في الدم. إذا كان رد الفعل تغيراً في ضغط الدم فإن R تقاس بالملليمتر زئبق.

أما إذا كان رد الفعل تغيراً في درجة الحرارة فإن R تقاس بالدرجات.

وعندما نجد التفاضل $\frac{dR}{dM}$ نكون قد عرفنا حساسية الجسم لدواء معين.

7- أخطاء شائعة:

يقع الطلاب في كثير من الأخطاء عندما يستخدمون قواعد الاشتقاق في تطبيق القواعد وفي تبسيط الإجابات.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين 1-A، 4-A، 7-A، 9-A، 14-A. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لمعنى $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

9- مسألة اليوم:

أراد صاحب مؤسسة صنع نموذج لعبة بدون غطاء علوي قاعدتها مربعة الشكل، بحيث يكون حجمها 4 dm^3 . يبلغ ثمن مادة التصنيع 20 درهماً لكل 1 dm^2 . لنعتبر x طول ضلع القاعدة و h ارتفاع اللعبة. أوجد بدلالة x كلفة اللعبة ثم أوجد هذه الكلفة إذا كانت $x = 20 \text{ cm}$.

$$C(x) = 20x^2 + \frac{320}{x}$$

$x = 20 \text{ cm}$ تعطي $x = 2 \text{ dm}$

$$C(x) = 240 \text{ AED}$$

الوحدة الثانية

القاعدة (3): قاعدة الضرب بعدد ثابت

The Constant Multiple Rule

إذا كانت u دالة في x ولانتهى $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = L$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot u(x) = c \cdot L$ حيث c ثابت.

البرهان

القاعدة (4): قاعدة الجمع والفرق

The Sum and Difference Rule

إذا كانت u و v دالتين في x وانتهى $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = L$ وانتهى $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = M$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} (u(x) \pm v(x)) = L \pm M$.

البرهان

وبمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالتين

البرهان

لنبدأ كالمعاد، بتطبيق تعريف النهاية:

لنعتبر $\epsilon > 0$ ، نريد أن نجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - a| < \delta$ فإن $|u(x) \pm v(x) - (L \pm M)| < \epsilon$.

نلاحظ أن:

$$|u(x) \pm v(x) - (L \pm M)| = |(u(x) - L) \pm (v(x) - M)|$$

وبموجب المثلثية:

$$|(u(x) - L) \pm (v(x) - M)| \leq |u(x) - L| + |v(x) - M|$$

لذلك، إذا كان $|u(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ و $|v(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ فإن $|u(x) \pm v(x) - (L \pm M)| < \epsilon$.

لذلك، نختار $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ حيث δ_1 و δ_2 هما δ ات النهاية لـ u و v على التوالي.

البرهان

لنأخذ مثالاً: $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)$ و $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

نريد أن نجد $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$.

نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [(x^2 + 1)(x^3 + 2)] = (x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx} (x^3 + 2) + (x^3 + 2) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1) \cdot 3x^2 + (x^3 + 2) \cdot 2x$$

$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 4x$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 4x$$

لذلك، $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = 5(2)^4 + 3(2)^2 + 4(2) = 80 + 12 + 8 = 100$.

البرهان

لنأخذ مثالاً: $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2)$ و $f'(x) = 3x^2 + 4x$.

نريد أن نجد $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$.

نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} [(x^2 + 1)(x^3 + 2)] = (x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx} (x^3 + 2) + (x^3 + 2) \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1) \cdot 3x^2 + (x^3 + 2) \cdot 2x$$

$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 4x$$

$$= 5x^4 + 3x^2 + 4x$$

لذلك، $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x) = 5(2)^4 + 3(2)^2 + 4(2) = 80 + 12 + 8 = 100$.

(c) 0

$$(2) \frac{du}{dx} = 15x^2 - 8x$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1; x = \frac{1}{3}$$

النقاط على المنحنى هي: $(-1, 0); \left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

(c) $8x(x + 6) + 4x^2(1) = \dots$

$$(5) f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$$

معادلة المماس:

$$y = 0 + \frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$\textbf{(6)} \quad f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

$$(7) f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 14x - 4$$

$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 14$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 72x$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 72$$

$$(8) \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}; \quad f'''(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}; \quad f^{(5)}(x) = \frac{-120}{x^6} \quad (x \neq 0)$$

السؤال الثاني

حل (6)

لنكن $u = x$ و حاصل ضرب التفاضل $v = y$ ، أوجد $y'(2)$ إذا كان $u(2) = 3$ ، $u'(2) = 2$ ، $v(2) = 4$ ، $v'(2) = -4$.

الحل:

من قاعدة الضرب:

$$u'v = (uv)' = u''v + uv'$$

وبالتعويض العددي:

$$\begin{aligned}
 y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\
 &= (3)(-4) + (4)(2) \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

كما أن مشتقة حاصل ضرب عاملين فالتفاضل لا تساوي حاصل ضرب مشتقاتهما، فإن مشتقة u في v لا تساوي u في مشتقة v ، ما يحدث هو العكس.

السؤال الثالث

قاعدة ناتج التفاضل

عند تفاضل u و v ، ناتج $u'v + uv'$ و عاملين فالتفاضل لا تساوي حاصل ضرب التفاضل بحسب:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{h^2 v(x+h)v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x+h)v(x)}{h^2 v(x+h)v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)(v(x+h) - v(x)) + (u(x) - u(x+h))v(x)}{h^2 v(x+h)v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x+h)}{h} v(x)}{h v(x+h)v(x)}
 \end{aligned}$$

نظير الكسور إلى كسر متكافئ يحتوي على الفرق بين ناتج التفاضل للتفاضل u ، v ، ونخرج ونكتب $u'(x)$ $v'(x)$ في البسط.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)v'(x) + v(x)u'(x) - u(x)v'(x) - v(x)u'(x)}{h v(x+h)v(x)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x)v'(x) - v(x)u'(x)}{v(x+h)v(x)}
 \end{aligned}$$

وبأخذ النهاية في البسط ولتقارب المعدل حتى قاعدة ناتج التفاضل.

حل (1)

استخدام قاعدة لوبي

لنوجد مشتقة الحد الثاني للنسبة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ عند النقطة (2, 1). نعلم أن مشتقة الحد الأول هي الشكل (2.13).

الحل
 يمكن أن نوجد المشتقة باستخدام قاعدة القسمة، لكن من الأسهل أن نستخدم قاعدة التبسيط أولاً. لنصمم حلاً بديلاً:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2x}{2x^2 + 1} \end{aligned}$$

الآن عند $x = 2$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} = \left[\frac{1}{2} - \frac{2x}{2x^2 + 1} \right]_{x=2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = -\frac{5}{18}$$

النسبة التي نريها بالمشتقة (2, 2) ومساوية 0 هي $y = -\frac{5}{18}x + 1$ ومن ثم:

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{5}{18}(x - 2) \\ y &= -\frac{5}{18}x + 1 + \frac{10}{9} \\ y &= -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9} \end{aligned}$$

نرى الرسم البياني (شكل (2.13)) حتى نلاحظ أن (2, 1) هي نقطة انحناء على $y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$ والنسبة $y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$ هي:

لا شك أن النسبة $y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$ هي مماسية عند النقطة (2, 1) لأننا نلاحظ أنها تعبر عن $y = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$ عند $x = 2$.

المسألة ذات الترتيب العالي
 المشتقة $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ هي أسنى المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ وبالمثل إلى المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ هي المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.
 لنكرر ذلك مرة أخرى لنعلم بالشيء إلى $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ إذا كان الأمر كذلك، فإن مشتقتها:

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2x^2 + 1} \right) = \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2}$$

أسنى المشتقة الثانية للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ وبالمثل إلى $y'' = \frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2}$ هي المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.
 مشتقتها:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2} \right)$$

أسنى المشتقة الثالثة للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ وبالمثل إلى $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2} \right)$ هي المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.
 إلا أن مضاعفات القواعد تجعلها أكثر تعقيداً، ولذا سنستخدم:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2} \right)$$

ولأسنى المشتقة الرابعة للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ وبالمثل إلى $y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{(2x^2 + 1)^2} \right)$ هي المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$.
 من $y = \frac{x^2}{2x^2 + 1}$ نرى أن المشتقة $y' = -\frac{5}{18}x + \frac{19}{9}$ هي مماسية عند $x = 2$.

(1) $\frac{3\pi}{4} \approx 2.356$

(2) $\left(\frac{306}{\pi}\right)^\circ \approx 97.403^\circ$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\cos a = 0$

(5) $\sin a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

(6) اضرب في $\frac{1 + \cos h}{1 + \cos h}$ وأكمل

(7) $y = 12x - 35$

حل (1): إيجاد مشتق $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ باستخدام قاعدة باي:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x)(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

حل (2): إيجاد معادلة خط التماس عند النقطة (1, 0) لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ حيث $f'(x) = \frac{2 - x^2}{(x^2 + 2)^2}$

قوى والصيغ السالبة (الأسس السالبة):

قاعدة التفاضل لقوى x والصيغة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى السالبة (الأسس السالبة). على أن نلاحظ أن قاعدة (2) لا يمكن استخدامها للصيغة السالبة لأننا نحتاج قاعدة القوى لتشتق القوى السالبة. باستخدام قاعدة باي:

قاعدة (3): قاعدة القوى والصيغة السالبة

Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً، $n \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$$

البرهان:

إذا كان n عدداً صحيحاً سالباً، $n = -m$ ، حيث m عدداً صحيحاً موجباً. نكتب:

$$\frac{d}{dx} x^{-m} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^m} \right)$$

$$= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx} (1) - 1 \cdot \frac{d}{dx} (x^m)}{(x^m)^2}$$

$$= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= -mx^{-m+1}$$

$$= mx^{-m-1}$$

حل (4): إيجاد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $x \neq 0$.

حل (1): إيجاد مشتقات الدوال التالية:

أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة: $y = x^3 - 5x^2 + 2$

المشتقات الأربع الأولى هي:

المشتقة الأولى: $y' = 3x^2 - 10x$

المشتقة الثانية: $y'' = 6x - 10$

المشتقة الثالثة: $y''' = 6$

المشتقة الرابعة: $y^{(4)} = 0$

حدد المشتقات الخمسة الأولى لكل من الدالتين $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ و $g(x) = x^3 - 5x^2 + 2$

يمكن أن $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ و $g(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ لهما المشتقات الخمسة الأولى متساوية.

أوجد المشتقات الخمسة الأولى للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $x \neq 0$.

تمارين التمهيدية للدرس 2-4:

1. حرك 135° إلى قياس نصف قطري أو جيباني.

2. حرك 135° إلى قياس نصف قطري أو جيباني.

3. أوجد $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ بدون استخدام الحاسبة.

4. إذا كان $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ، فما قيمة $\cos \theta$ ؟

5. إذا كان $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ، أوجد القيمتين الممكنتين لـ $\cos \theta$.

6. أوجد قيمة $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

7. أوجد معادلة مماس لمنحنى $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ عند النقطة (1, 0).

تمارين التمهيدية للدرس 2-4:

أعطيت أجهزة الطقس لقياس كمية الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء (واحد) (ضغط مطلق) $(P = 1 \text{ atm})$. يتركب الضغط كذا:

فقط الماء تحت الماء.

وحدة قياس الضغط P (واحد) مع القوس P (واحد) بحسب المعادلة: $P = \frac{1}{33} \rho h + 1$ و ρ الكثافة و h عمق الماء.

ومن المعروف بحسب قانون بويل، أن حجم الهواء V يتغير عكسياً مع الضغط P أي:

أن $V = \frac{1}{P}$ حيث V بالكميات (واحد) و P بالكميات (واحد).

أعطت الطقس بسرعة يتركب ضغط الهواء في زوايا وأنت ترتفع إلى الأعلى. فمثلاً يكون في زوايا 4 من الهواء على عمق 66 ft $(P = 3 \text{ atm})$ و $h = 66$ من الهواء على عمق 330 ft $(P = 2 \text{ atm})$. باستخدام العلاقة أعلاه أكتب جدولاً يربط بين h و P في كيف أن حجم الهواء في زوايا يتغير مع عمق الطقس. أكتب جدولاً يربط بين h و P في كيف أن حجم الهواء في زوايا يتغير مع الضغط.

1- الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على استخدام قواعد التفاضل للدوال المثلثية الأساسية.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة الدالة $\sin x$ ، مشتقة الدالة $\cos x$ ، مشتقة الدالة $\tan x$.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh - 1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - \cos 0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{h}{2} \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{h}{2} \\ &= -1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

علمًا أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

5- التدريس:

يمكنك أن تبدأ هذا الدرس بأن تطلب إلى الطلاب أن يكملوا مثال (1)، والذي يسمح للطلاب بأن يطبقوا قواعد مشتقات دوال الجيب وجيب التمام. ارتباطًا بهذا الشرح قد ترغب في أن يضع الطلاب قيمة صغيرة لـ h مثل $h = 0.001$ وقيمة أخرى أصغر وأن يرسموا الرسم البياني لنتائج قسمة الفرق: $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$. ينبغي أن يعرف الطلاب منحنى $y = \cos x$.

قاعدة اشتقاق $\sin x$ يتم برهنتها من تعريف المشتقة مباشرة، باستخدام نهايتين أساسيتين هما $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cosh) - 1}{h} = 0$. يمكن الحصول على قاعدة اشتقاق $\cos x$ بطريقة مماثلة. قد ترغب في أن تبرز الدور المهم لقوانين مجموع زاويتين في حالتين $\sin(a+b)$ و $\cos(a+b)$ في هذه الاشتقاقات (التفاضل).

قواعد اشتقاق (تفاضل) الدوال المثلثية الأربع الأساسية الأخرى يمكن أن تعرض بسهولة باستخدام المتطابقات وقواعد اشتقاق دوال الجيب وجيب التمام.

يمكنك أن تلخص الدرس بتقديم جدول يعرض مشتقات الدوال المثلثية الأساسية. اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا طرقًا مختلفة لتذكر هذه المشتقات.

موضوع لتعلم

- مشتقة دالة الجيب.
- مشتقة دالة جيب التمام.
- مشتقات الدوال المثلثية (الأخرى).

2-4 مشتقات الدوال المثلثية

Differentiation of Trigonometric Functions

مشتقة دالة الجيب

الدوال المثلثية هي دوال دورية. لأن كثيرًا من الظواهر التي نراها في الطبيعة هي دورية (دورات القلب، الزلازل، المد والجزر، الطقس). ومن المعروف أن الدوال الدورية للقوس يمكن وصفها بدالة الجيب وجيب التمام. لذلك فإن مشتقات الجيب وجيب التمام تصب دورًا مهمًا في وصف الظواهر الدورية. وهذا الدرس يقدم مشتقات هذه الدوال بشكل أساسي.

المشتقة

ليكن $y = \sin x$ ، فإن

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sin x)(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

الآن، وبما أننا نعرف أن دالة الجيب قابلة للاشتقاق، فإن $\sin x$ ومشتقاتها يمكن أن نوجد الاندفاع. نحن نعرف أيضًا أن $\sin x$ متصلة في مجالها، والشيء نفسه ينطبق على كل الدوال المثلثية في هذا الدرس. كل ما علينا فعله للاشتقاق عند كل نقطة في مجالها، لذلك كل ما علينا فعله عند كل نقطة في مجالها، ونوجد الاندفاع لنطبق على كل منها.

مشتقة دالة جيب التمام

مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب.

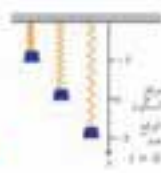
$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

50

Simple Harmonic Motion

الحركة التوافقية البسيطة

حركة تسمى بالحركة التوافقية البسيطة (SHM) هي حركة دورية. في نهاية لولب عمودي من جدار متحرك، الحركة التوافقية البسيطة. نستخدم مثال (2) حالة لا تكون فيها قوى جذب الاحتكاك كالمعيار للحركة.



مثال (2)

حركة توافقية بسيطة في لولب

كل ما نحتاجه من لولب (الكتلة 2.14) هو كتلة 5 ج. عند $t = 0$ ، الكتلة في موضع السكون ($x = 0$). ثم أطلق الكتلة عند $t = 0$ ليبدأت إلى أعلى وإلى أسفل. فموقع الكتلة عند أي زمن t بعد ذلك هو $x = 5 \cos t$. فما سرعة الكتلة وموقعها عند أي زمن t حيثما كانت.

الحل:

$$x = 5 \cos t$$

الموقع:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} (5 \cos t) = -5 \sin t$$

السرعة اللحظية:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (-5 \sin t) = -5 \cos t$$

التسارع:

لاحظ أنه يمكننا أن نعلم من هذه المعادلات:

1) مع مرور الزمن، يتحرك الكتلة إلى أعلى وإلى أسفل. عند $t = 0$ ، $x = 5$ ، أي على محور السلفا. 2) سرعة الحركة تساوي 0، مرة الحركة تساوي 2π.

3) السرعة اللحظية $-5 \cos t$ = 0 عندما $t = 0$ ، $t = \pi$ ، $t = 2\pi$. كما يظهر من الرسم البياني في الشكل (2.15)، لذلك فإن سرعة الكتلة

1) $x = 5 \cos t$ تكون أكبر ما يمكن عندما $t = 0$ ، $t = 2\pi$ ، أي عند $t = 0$ ، سرعة الكتلة تساوي صفراً عندما $t = \pi$ ، $t = 3\pi$. يحدث هذا عندما $t = 0$ ، $t = \pi$ ، $t = 2\pi$ ، $t = 3\pi$ عند

نقطة النهاية للحركة.

2) قيمة المعادلة تكون ذات العكس العكس القيمة x عندما يكون التغير في موقع السكون، فإن المعادلة تصبح $x = -5 \cos t$ عندما يكون التغير في موقع السكون، فإن التوابل يصبح إلى أعلى.

3) المعادلة $x = 5 \cos t$ ، تساوي صفراً فقط عند موقع السكون حيث $t = 0$ ، $t = \pi$ ، $t = 2\pi$ ، $t = 3\pi$ ، وتكون فترة الحركات والفترة الباقية من التوابل لغيرها معطاة بعداً. عندما يكون

التغير في أي مكان آخر فإن التوابل تكون غير حاسنة، والعجلة تصبح غير صفراً. المعادلة تكون أكبر ما يمكن عند النقاط الأبعد عن موقع السكون حيث

$$x = 5 \cos t = 5$$

51

ملاحظات على الأمثلة:

يبين المثال (1) للطلاب كيفية استخدام مشتقات دوال الجيب وجيب التمام إلى جانب قواعد الاشتقاق السابق تعلمها.

6- الربط:

لا يوجد.

7- أخطاء شائعة:

ينسى الطلاب أحياناً أو يطبقون خطأً المتطابقات المثلثية الأساسية. وقد ترغب في مراجعة متطابقات فيثاغورس، مجموع الزوايا، نصف الزاوية. عند استخدام حاسبة بيانية أو حاسوب، ينسى الطلاب أحياناً استخدام مقياس الراديان أو إدخال تعبيرات مثل $\cos^2 x$ بصورة $(\cos x)^2$.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين 2-A، 6-A، 9-A، 13-A. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لاشتقاق الدوال المثلثية.

9- مسألة اليوم:

تبلغ مساحة مستطيل $3x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 8$ ويبلغ طوله $x^2 - x + 4$. أوجد محيط هذا المستطيل.

عرض المستطيل:

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 9x^2 + 6x - 8}{x^2 - x + 4} = 3x^2 + x - 2$$

محيط المستطيل:

$$2(x^2 - x + 4) + 2(3x^2 + x - 2) = 8x^2 + 4$$

مثال 1: إيجاد المشتقات:

(أ) $f(x) = x^2 \sin x$ (ب) $h(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$

الحل:

لـ (أ): $\frac{d}{dx} (x^2 \sin x) = x^2 \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx} (x^2)$
 $= x^2 \cos x + 2x \sin x$

لـ (ب): $\frac{d}{dx} \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \sin x} \right) = \frac{(1 - \sin x)' \cdot (1 - \sin x) - (1 - \sin x) \cdot (1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2}$
 $= \frac{(1 - \cos x) - (1 - \sin x)(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$
 $= \frac{1 - \cos x + \sin x \cos x}{(1 - \sin x)^2}$
 $= \frac{1 - \cos x}{(1 - \sin x)^2}$

1 إيجاد المشتقات:

(أ) $f(x) = \sin^2 x$ (ب) $h(x) = \cos^2 x$
 (ج) $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ (د) $w(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

من العلوم في الفيزياء أن السرعة المتجهة لجسم متحرك عند لحظة على مسار حركة هي معدل تغير المسافة (الزمن) التي يقطعها الجسم في لحظة ما. وإذا كانت $s(t)$ هي الدالة التي تعطي موقع الجسم عند أي لحظة t من حركة الجسم، فإن سرعة الجسم في لحظة t هي مشتقة $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن t . أي أن $v(t) = s'(t)$. v وتكون مشتقة الجسم في أي لحظة t هي مشتقة الدالة $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن t . أي أن $v(t) = s'(t)$. وهذا لأن السرعة المتجهة للجسم هي مشتقة المسافة.

2 جسم متحرك في حركة توافقية بسيطة، موقعه $s(t) = 2 - 2 \sin t$ (بشرط t بالثانية). (أ) إيجاد السرعة المتجهة للجسم والسرعة والمعدل عند أي زمن t . (ب) إيجاد السرعة المتجهة للجسم والسرعة والمعدل عند اللحظة $t = \frac{\pi}{4}$. (ج) إيجاد حركة الجسم.

الحل:

السرعة المتجهة في اللحظة t هي $v(t) = s'(t)$. وعند $t = \frac{\pi}{4}$ ، $v(\frac{\pi}{4}) = -2 \cos(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. السرعة المتجهة عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$.

السرعة:

السرعة هي معدل تغير المسافة في اللحظة t . وعند $t = \frac{\pi}{4}$ ، $v(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. السرعة المتجهة عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$.

السرعة:

السرعة هي معدل تغير المسافة في اللحظة t . وعند $t = \frac{\pi}{4}$ ، $v(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$. السرعة المتجهة عند $t = \frac{\pi}{4}$ هي $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$. المعدل عند $t = \frac{\pi}{4}$ هو $-\sqrt{2}$.

2-5 قاعدة السلسلة

1- الأهداف:

- يكون الطلاب قادرين على إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- يكون الطلاب قادرين على إيجاد ميول المنحنيات البارامترية.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

مشتقة دالة الدالة، قاعدة الاشتقاق من الخارج إلى الداخل، استخدام قاعدة السلسلة، ميول المنحنيات البارامترية.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

أوجد مشتقات الدوال التالية:

- (a) $f(x) = 2x^3 - 5x$ $f'(x) = 6x^2 - 5$
- (b) $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ $f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2}$
- (c) $f(x) = (2x-1)(3x+4)$ $f'(x) = 2(3x+4) + 3(2x-1)$
- (d) $f(x) = x + \sin x$ $f'(x) = 1 + \cos x$

5- التدريس:

يمكن أن يوفر المثالان (1 و 2) مقدمة لقاعدة السلسلة. ولأن هذين المثالين يسهل فهمهما، فإنهما يساعدان على جعل قاعدة السلسلة تبدو معقولة. يستخدم الكتاب مدخلاً تقليدياً لتعليم الاستخدام الصحيح لقاعدة السلسلة؛ أولاً: يتعلم الطلاب إيجاد مشتقة (تفاضل) $y = f(g(x))$ بوضع $u = g(x)$ ، وحساب المشتقتين $f'(u)$ ، $g'(x)$ ثم تطبيق قاعدة السلسلة للحصول على: $y' = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$. عندئذ تختصر العملية بالتعويض عن u والإشارة إلى $g(x)$ على أنها الدالة الداخلية. هذه العملية المختصرة تسمى قاعدة «الخارج - داخل». ينبغي أن يقوم الطلاب بكثير من التدريبات على قاعدة السلسلة حتى يتمكنوا من استخدامها بصورة متقنة.

عند تقديم صيغة لبيبتر لقاعدة السلسلة، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$ ، أكد أن $\frac{dy}{dx}$ تحسب قيمتها عند $u = g(x)$ ، تحسب قيمتها عند x . يمكنك تلخيص معظم هذا الدرس بمناقشة تمرين (13).

قاعدة السلسلة

في المثالين (1-3)، ليكن $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، $h(x) = 2x$. أوجد في كل حالة مشتقة الدالة المركبة.

- $f(g(x))$
- $f(g(h(x)))$
- $f\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)$

في المثالين (4-6)، ليكن $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = x^2 + 2$ ، $h(x) = 3x$. أوجد في كل حالة مشتقة الدالة المركبة.

- $\sqrt{\cos x + 2}$
- $\sqrt{5 \cos^2 x + 2}$
- $3 \cos x + 6$
- $\cos 37x^\circ$
- $\cos \sqrt{2 + 3x^2}$

2-5 قاعدة السلسلة

مقدمة

في المثالين (1-3)، ليكن $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = x^2 + 1$ ، $h(x) = 2x$. أوجد في كل حالة مشتقة الدالة المركبة.

مثال (1)

الدالة $y = f(g(x)) = \sin(x^2 + 1)$ هي تركيبة الدالتين $u = g(x) = x^2 + 1$ و $y = f(u) = \sin u$. نريد إيجاد $\frac{dy}{dx}$. نستخدم قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 1)$$

مثال (2)

الدالة $y = f(g(h(x))) = \sin(x^2 + 2)$ هي تركيبة الدالتين $u = g(h(x)) = x^2 + 2$ و $y = f(u) = \sin u$. نريد إيجاد $\frac{dy}{dx}$. نستخدم قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x = 2x \cos(x^2 + 2)$$

مثال (3)

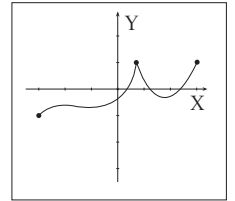
الدالة $y = f\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right) = \sin\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)$ هي تركيبة الدالتين $u = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 1}{2x}$ و $y = f(u) = \sin u$. نريد إيجاد $\frac{dy}{dx}$. نستخدم قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot \left(\frac{2x \cdot 2x - (x^2 + 1) \cdot 2}{(2x)^2}\right) = \cos\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \cdot \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2} = \cos\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \cdot \frac{2x^2 - 2}{4x^2} = \cos\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

اختبار الوحدة

إجابات اختبار الوحدة الثانية

$$(1) \quad f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(5+h)^2 + (5+h)] - (5^2 + 5)}{h} = 11$$



(3) (ب)

$$(4) \quad f'(2) \rightarrow \infty. \text{ يوجد خط مماس عمودي عند } x = 2.$$

$$(5) \quad 21x^2 + 8x - 6; 42x + 8$$

$$(6) (a) \quad -198$$

$$(b) \quad -19/27$$

$$(7) \quad \frac{1 + \sin x - \sin x \cos^2 x}{\cos^2 x (1 + \sin x)^2}$$

$$(8) \quad \left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, -\sqrt{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3}, \sqrt{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3}, -\sqrt{3}\right)$$

$$(9) \quad -15x^2 \sin 5x^3$$

$$(10) \quad y = \frac{x}{3} + 14$$

(11) (هـ) II و III

(12) (أ) الانتقال:

$$s(5) - s(0) = (2(125) - 25 - 3) - 3 = 219 \text{ ft/sec}$$

$$(ب) \text{ متوسط السرعة: } \frac{219}{5} = 43.8 \text{ ft/sec}$$

$$(ج) \text{ السرعة المتجهة: } s'(t) = 6t^2 - 5$$

عند $t = 5$

$$s'(5) = 6(25) - 5 = 145 \text{ ft/sec}$$

$$(د) \quad s''(t) = 12t$$

$$s''(5) = 12(5)$$

$$s''(5) = 60 \text{ ft/sec}$$

$$(هـ) \text{ يتغير الاتجاه عند } s'(t) = 0$$

$$6t^2 - 5 = 0$$

$$t^2 = \frac{5}{6}$$

$$t = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$t \approx 0.9 \text{ sec}$$

$$(13) \text{ (أ) الانتقال: } 2x \, dx + 2y \, dx + 2x \, dy - 6y \, dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+y}{3y-x}$$

$$y'_{(1,1)} = \frac{2}{2} = 1$$

اختبار الوحدة

1 استخدم تعريف الاشتقاق لإيجاد اشتقاق $f(x) = x^2 + x$ عند $x = 5$.

2 فتح رصيف يدان فكلتا الدالتان متساويتان $f(x) = 3x - 3$ حيث $f(1) = 0$ و $f(2) = 3$. اكتب المشتق $f'(x)$ عند $x = 1$.



3 أوجد $f'(x)$ باستخدام قاعدة القوة $f(x) = 7x^2 + 4x - 8$ عند $x = 2$.

4 اكتب الاشتقاق $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

5 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

6 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

7 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

8 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

9 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

10 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

11 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

12 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

13 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

14 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

15 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

16 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

17 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

18 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

19 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

20 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

21 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

22 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

23 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

24 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

25 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

26 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

27 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

28 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

29 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

30 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

31 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

32 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

33 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

34 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

35 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

36 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

37 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

38 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

39 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

40 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

41 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

42 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

43 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

44 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

45 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

46 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

47 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

48 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

49 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

50 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

51 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

52 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

53 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

54 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

55 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

56 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

57 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

58 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

59 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

60 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

61 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

62 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

63 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

64 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

65 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

66 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

67 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

68 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

69 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

70 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

71 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

72 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

73 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

74 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

75 اوجد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sqrt{x} - 2$ عند $x = 4$.

ميل الخط العمودي عند النقطة (1, 1) هو -1 ومعادلته:

$$y = 1 - 1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$

(ب) التقاطع من جديد:

$$x^2 + 2x(-x + 2) - 3(-x + 2)^2 = 0$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 0$$

$$x = 1 \text{ أو } x = 3$$

$$(1, 1); (3, -1)$$

$$xdy + ydx + 2dx - dy = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dx}{dy} = y' = \frac{2+y}{1-x}$$

ميل الخط $2x + y = 0$ هو -2 إذاً:

$$\frac{1}{2} = \frac{2+y}{1-x}$$

$$x = -2y - 3$$

في المعادلة الأولى:

$$(-2y - 3)(y) + 2(-2y - 3) - y = 0$$

فوجد النقاط: $(-1, -1); (3, -3)$

المعادلتان: $y = -2x - 3$

$$y = -2x + 3$$

(15) المنحنى الأول: $2x^2 + 3y^2 = 5$

$$\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dy}(3y^2) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$4x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$$

المنحنى الثاني: $y^2 = x^3$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^3)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

عند النقطة: (1,1) ميل المماس الأول هو $-\frac{2}{3}$ وميل المماس

الثاني هو $\frac{3}{2}$ إذاً $1 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$ وبالتالي المنحنيان متعامدان

عند (1,1) .

$$(16) \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[8(s-t)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{d}{dt}(1)$$

$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{ds}{dt} - 1\right)$$

$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}(V-1)\left(\frac{ds}{dt} = V\right)$$

$$= 4(s-t)^{-\frac{1}{2}}\left[\left(8(s-t)^{-\frac{1}{2}} + 1\right) - 1\right]$$

$$= 32(s-t)^{-\frac{1}{2}}(s-t)^{\frac{1}{2}} = 32 \text{ ft/sec}^2$$

إذاً العجلة هي 32 ft/sec^2

الوحدة الثانية

1. أمجد أسرار في الحاسوب عندما $y = 5$.
 (أ) عند أي قيمة x في الوقت t يمر الحاسوب بالقيمة؟
 (ب) أمجد معادلة الخط العمودي على منحنى الدالة: $2xy - 3y^2 = 0$ في النقطة $(1, 1)$.
 (ج) أمجد في أي نقطة يقطع هذا الخط من جديد منحنى الدالة.
 2. أمجد معادلة الخط العمودي على منحنى الدالة: $xy = 2x - 3y$ بحيث تكون
 موازية للخط $0 = y + 2x$. فسر خطوط الحل.
 3. يكون متجهان متعامدان عند نقطة تقاطعهما إذا كانتا متعامدتين عند هذه النقطة
 دائماً. أثبت أن منحنى $2x^2 + 3y^2 = 5$ متعامد مع المنحنى $xy = 0$ في جميع النقاط
 $(1, 1)$ و $(-1, -1)$.
 4. أعطى السرعة للجهة المتحرك جسم بالفاصل: $V = 1 + 8\sqrt{x - 7} \text{ ft/s}$. عند
 اللحظة $t = 0$ ، يقطع هذا الجسم مسافة 11 ft من نقطة البداية. أثبت أن قيمة هذا
 التسارع هي 32 ft/sec^2 .

67

الوحدة الثانية

تكون الدالة f قابلة للتفاضل في نقطة a إذا وفقط إذا كانت $f'(a) = f'(a)$.
 إذا كانت الدالة f لها المشتق عند نقطة a ، فهي متصلة عند هذه النقطة. ولكن
 العكس لا يكون دائماً صحيحاً.
 - قاعدة التفاضل:
 $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
 $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$ ($v \neq 0$)
 - اشتقاق الدوال المثلثية:
 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
 $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
 $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
 $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
 $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
 $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$
 - اشتقاق دالة الدالة: $y = g(x)$ حيث $u = f(x)$ ، حيث $y = f(u)$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ، حيث $y = f(u)$ و $u = g(x)$
 - دالة الاشتقاق الدالة التفاضل:
 $y = f(x) = u^m$ حيث $u = g(x)$
 $\frac{dy}{dx} = m \cdot u^{m-1} \cdot \frac{du}{dx}$

69

لكي تتماشى بمرونة مع الجدول الزمني الموضوع، قُسمت هذه الوحدة إلى 5 دروس على النحو الآتي:

3-1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال (ص 72-78)

المصطلحات الأساسية: القيم القصوى المطلقة، قيمة عظمى محلية، قيمة صغرى محلية، النقطة الحرجة.

3-2 الدوال المتزايدة والمتناقصة (ص 79-84)

المصطلحات الأساسية: القيمة المتوسطة، الدالة المتزايدة، الدالة المتناقصة.

3-3 ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f (ص 85-93)

المصطلحات الأساسية: المشتقة، التقعر، نقطة الانقلاب (الانعطاف).

3-4 النمذجة والأوفقية (تطبيقات على القيم القصوى) (ص 94-102)

المصطلحات الأساسية: النمذجة، الأوفقية، القيمة العظمى للربح، التكلفة المتوسطة، التكلفة الحدية.

3-5 المعدلات المرتبطة (ص 103-107)

المصطلحات الأساسية: المعدل المرتبط.

ماذا سيتعلم الطلاب؟
ولماذا؟

سيتعرف الطلاب في هذه الوحدة القيم القصوى المحلية الصغرى والعظمى والنقاط الحرجة وتطبيقاتها في مواقف حياتية مثل الاقتصاد والطب وغير ذلك. ثم يعمقون معارفهم بتأثير مشتقة الدالة على سلوكها من ناحية تزايدها أو تناقصها، ويحددون التقعر ونقاط الانقلاب للمنحنى.

مشروع الوحدة

عرض المشروع:

اسأل الطلاب وصف ما يحدث عندما تنتقل بالحافلة من البيت إلى المدرسة وأنت تحمل كوباً من العصير. ناقش معهم تأثير حركة السيارة أو الحافلة على توازن الأجسام الموجودة داخلها.

سلم التقييم:

- 4 - الشروحات واضحة ومفهومة بكاملها. الحسابات دقيقة ومفصلة. الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة جداً مع النتيجة النهائية. التقرير مفصل وواضح ومفهوم. القوانين المستخدمة كلها صحيحة.
- 3 - الشروحات واضحة ومفهومة. الحسابات معظمها دقيقة. الاستنتاجات عن الرسم البياني معقولة وقريبة من النتيجة النهائية. التقرير مفصل ولكن ينقصه بعض الإيضاح. القوانين في معظمها صحيحة.
- 2 - الشروحات ينقصها الوضوح، وفي بعض الأحيان غير مفهومة. أخطاء متعددة في الحسابات. بعض القوانين المستخدمة غير مقبولة. لا ترابط بين الرسم البياني والنتيجة النهائية. التقرير غير مفصل.
- 1 - معظم عناصر المشروع ناقصة أو تحتوي على أخطاء كثيرة.

إجابات مشروع الوحدة:

$$(1) \text{ (أ) } y_1 = -\frac{B}{2} ; y_2 = \frac{y}{2} ; y_3 = \frac{H}{2}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \pi \delta (R + T)^2 B \\ m_2 &= \pi \delta R^2 y \\ m_3 &= \delta \pi (R + T)^2 H - \delta \pi R^2 H \\ m_3 &= \delta \pi T^2 H + 2 \delta \pi R T H \end{aligned} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= f(y) \\ &= \frac{-\frac{1}{2}(R+T)^2 B^2 + \frac{1}{2}R^2 y^2 + \frac{H}{2}(T^2 H + 2RTH)}{B(R+T)^2 + R^2 y + T^2 H + 2RTH} \end{aligned} \quad (\text{ج})$$

(د) نعوض كل رمز بقيمته العددية فنجد بعد الاختزال أن

$$\bar{y} = f(y) = \frac{y^2 + 21.75}{2y + 8.5}$$

(2) (أ) الرسم البياني (آلة حاسبة أو حاسوب)

(ب) حوالي 2 cm . وهي ارتفاع نقطة الاتكاز عن قاعدة الكوب.

$$f'(y) = \frac{2y(2y + 8.5) - 2(y^2 + 21.75)}{(2y + 8.5)^2} \quad (\text{ج})$$

$$f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 44}{(2y + 8.5)^2}$$

الفترة	$0 < y < 2.08$	$y > 2.08$
إشارة $f'(y)$	-	+
سلوك $f(y)$	↘	↗

(هـ) القيمة المحلية الصغرى تحدث عند $y \approx 2.08 \text{ cm}$ وهي

قيمة قريبة جداً من $y = 2 \text{ cm}$.

(و) يجب أن تكون كمية القهوة على أدنى ارتفاع وهو

تقريباً 2.08 cm حتى يبقى الكوب في أفضل حالة

ثبات فيما تسير السيارة. وتكون نقطة الارتكاز على

ارتفاع 2.06 cm تقريباً.

* تتنوع الإجابات.



3-1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

1- الأهداف:

— يكون الطلاب قادرين على تحديد القيم القصوى (العظمى والصغرى) والقيم المحلية والمطلقة.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

قيم قصوى مطلقة، قيم قصوى محلية (نسبية).

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 6x + 2$
(أ) اطلب إلى الطلاب إكمال الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$								

(ب) اطلب إليهم تعيين النقاط الموجودة في الجدول على شبكة إحداثيات.

(ج) اسألهم: هل يوجد قيم صغرى؟ وقيم عظمى؟

5- التدريس:

إن إحدى الطرائق للبدء في هذا الدرس هي رسم مخطط لدالة مثل تلك المبينة في شكل (3-4)، ومناقشة القيمة الصغرى والعظمى (المطلقة) المحلية. ويمكن للطلاب أن يفهموا تعريفات تلك المفاهيم بسهولة أكبر إذا ما تلقوا تقديمًا حديسيًا لهذه المعاني. ويعد فهم القيم العظمى والقيم الصغرى أمرًا حاكمًا في دراسة تطبيقات المشتقة. يحتاج الطلاب إلى لغة التفاضل والتكامل، لذا شدد على مصطلحات هذا الدرس. لذلك فإنه يكون من المهم ضم المهارات الجبرية المكتسبة سابقًا إلى دراسة التفاضل والتكامل. يوفر مثال (1) نتيجة ذات معنى لهذا الدرس.

ملاحظات على الأمثلة:

يبين مثال (2) كيف يمكن أن تتغير القيم القصوى لدالة بسيطة من دوال كثيرة الحدود بحسب المجال المختار. قد ترغب في التوسع في هذا المثال بمناقشة القيم القصوى المحلية والمطلقة على مجالات إضافية مثل $[-4, 2]$ ، $(-4, 2)$ ، $[-4, \infty)$.

3-1 القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

القيم القصوى المطلقة

أحد الإلهام الأكثر غنى التي يمكن أن نلتقيها من منطقة دالة هو ما إذا كانت الدالة ذات قيمة عظمى أو صغرى على فترة معينة. ونوضح هذه القيم إن وجدنا. إذا ما عرفنا كيف إيجاد القيم القصوى لدالة، سوف نستطيع أن نجيب عن أسئلة مثل: دما الحجم الأقصى لكافة خردل من كدور؟ دما الطريقة الأفضل لتكثيف توصيل التبريد خلال النابض من بر بترول بعدد من الشايفر إلى مصنع تكرير على الساحل؟ دما مساحة أكبر حظوظ لتطور مستطيلة الشكل في مارتينيك يمكن تسويرها بأقل 360 ورملة؟ بر من أن كافة نشر التعداد من السور 30 بر نحو 49 سوف ترى الإجابة من خلال هذه الأسئلة في تيرس (3-4).

تعريف: القيم القصوى المطلقة

إذا كانت دالة f على D ، $f(x)$ تكون:

أ) القيمة العظمى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(y)$ لكل y في D .

ب) القيمة الصغرى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(y)$ لكل y في D .

القيم العظمى والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى المطلقة. وهناك ما يسمي كلاً المطلقا ولكن القيم القصوى والصغرى.

بين مثال (1) أن القيم القصوى يمكن أن تقع عند نقاط داخلية أو نقاط طرفية للفترة.

حل (1):

على الفترة $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ ، $f(x) = \sin x$ لها قيمة عظمى تساوي 1 (مرة واحدة) وقيمة صغرى تساوي -1 (مرة واحدة). الدالة $f(x) = \sin x$ لها قيمة عظمى تساوي 1 وقيمة صغرى تساوي -1 (في كل 3.1).

قد يكون كذلك قيم قصوى مطلقة وذلك بحسب مجالها.

1. توجد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 1 + \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$.

2. توجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 3x + 2$ على D في الحالات التالية:

(a) $D = (-\infty, \infty)$

(b) $D = [-2, 1]$

(c) $D = [-2, 3]$

(d) $D = (2, 3)$

القيم القصوى المحلية

بين مثال (3.4) رسمًا يبين أن حسن نقاط حيث الدالة لها قيم قصوى في مجالها $[0, \pi]$. تقع القيمة الصغرى المطلقة للدالة عند نقطة π على الرغم من أن قيمة الدالة عند النقاط π الصغرى من أن قيمة قريبة منها. ولتوضيح النقطة ناحية اليسار ويظهر ناحية اليمين حول النقطة π هناك قيمة عظمى محلية $f(x)$ الدالة لها قيمة عظمى مطلقة عند π .

تعريف: القيم القصوى المحلية

إذا كانت f دالة داخلية في مجال الدالة f فإن $f(x)$ تكون:

أ) قيمة عظمى محلية عند x إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(y)$ لكل y في فترة مفتوحة حول x .

ب) قيمة صغرى محلية عند x إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(y)$ لكل y في فترة مفتوحة حول x .

القيم القصوى المحلية تسمى أيضًا قيم قصوى نسبية ويمكن أن توجد في تعريف القيم القصوى المحلية (بما أن النقاط القصوى القصوى التفرعات (نقاط التفرع) تكون كذلك f قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية عند نقطة قصوى f كانت الدالة المستمرة لتحتل لكل x في فترة مفتوحة حول x تحتوي على نقطة π تكون قيمة قصوى ما أيضًا قيمة قصوى محلية لأن تولها قيمة قصوى بعدد جانيها. لذلك فإن قادمة من القيم القصوى المحلية سوف تشمل النقاط قيم قصوى مطلقة إن وجدنا.

إيجاد القيم القصوى

لنأخذ مثال الدالة حيث يكون ذلك في مثال (3.4) قيمة قصوى محلية هي غطاء حيث $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ليس لها وجود كما نلاحظ في الطريقة الآتية:

طريقة (2): القيم القصوى المحلية

إذا كانت دالة f قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية عند نقطة داخلية x في مجالها وكانت f' لها وجود عند x فإن $f'(x) = 0$.

القيم القصوى (العظمى والصغرى) للدوال

القيم القصوى المحلية (النسبية)

بين مثال (3.4) رسمًا يبين أن حسن نقاط حيث الدالة لها قيم قصوى في مجالها $[0, \pi]$. تقع القيمة الصغرى المطلقة للدالة عند نقطة π على الرغم من أن قيمة الدالة عند النقاط π الصغرى من أن قيمة قريبة منها. ولتوضيح النقطة ناحية اليسار ويظهر ناحية اليمين حول النقطة π هناك قيمة عظمى محلية $f(x)$ الدالة لها قيمة عظمى مطلقة عند π .

تعريف: القيم القصوى المحلية

إذا كانت f دالة داخلية في مجال الدالة f فإن $f(x)$ تكون:

أ) قيمة عظمى محلية عند x إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(y)$ لكل y في فترة مفتوحة حول x .

ب) قيمة صغرى محلية عند x إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(y)$ لكل y في فترة مفتوحة حول x .

القيم القصوى المحلية تسمى أيضًا قيم قصوى نسبية ويمكن أن توجد في تعريف القيم القصوى المحلية (بما أن النقاط القصوى القصوى التفرعات (نقاط التفرع) تكون كذلك f قيمة عظمى أو قيمة صغرى محلية عند نقطة قصوى f كانت الدالة المستمرة لتحتل لكل x في فترة مفتوحة حول x تحتوي على نقطة π تكون قيمة قصوى ما أيضًا قيمة قصوى محلية لأن تولها قيمة قصوى بعدد جانيها. لذلك فإن قادمة من القيم القصوى المحلية سوف تشمل النقاط قيم قصوى مطلقة إن وجدنا.

إيجاد القيم القصوى

لنأخذ مثال الدالة حيث يكون ذلك في مثال (3.4) قيمة قصوى محلية هي غطاء حيث $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ليس لها وجود كما نلاحظ في الطريقة الآتية:

طريقة (2): القيم القصوى المحلية

إذا كانت دالة f قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية عند نقطة داخلية x في مجالها وكانت f' لها وجود عند x فإن $f'(x) = 0$.

القيم القصوى المطلقة

أحد الإلهام الأكثر غنى التي يمكن أن نلتقيها من منطقة دالة هو ما إذا كانت الدالة ذات قيمة عظمى أو صغرى على فترة معينة. ونوضح هذه القيم إن وجدنا. إذا ما عرفنا كيف إيجاد القيم القصوى لدالة، سوف نستطيع أن نجيب عن أسئلة مثل: دما الحجم الأقصى لكافة خردل من كدور؟ دما الطريقة الأفضل لتكثيف توصيل التبريد خلال النابض من بر بترول بعدد من الشايفر إلى مصنع تكرير على الساحل؟ دما مساحة أكبر حظوظ لتطور مستطيلة الشكل في مارتينيك يمكن تسويرها بأقل 360 ورملة؟ بر من أن كافة نشر التعداد من السور 30 بر نحو 49 سوف ترى الإجابة من خلال هذه الأسئلة في تيرس (3-4).

تعريف: القيم القصوى المطلقة

إذا كانت دالة f على D ، $f(x)$ تكون:

أ) القيمة العظمى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(y)$ لكل y في D .

ب) القيمة الصغرى المطلقة على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(y)$ لكل y في D .

القيم العظمى والصغرى المطلقة تسمى القيم القصوى المطلقة. وهناك ما يسمي كلاً المطلقا ولكن القيم القصوى والصغرى.

بين مثال (1) أن القيم القصوى يمكن أن تقع عند نقاط داخلية أو نقاط طرفية للفترة.

حل (1):

على الفترة $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ ، $f(x) = \sin x$ لها قيمة عظمى تساوي 1 (مرة واحدة) وقيمة صغرى تساوي -1 (مرة واحدة). الدالة $f(x) = \sin x$ لها قيمة عظمى تساوي 1 وقيمة صغرى تساوي -1 (في كل 3.1).

قد يكون كذلك قيم قصوى مطلقة وذلك بحسب مجالها.

1. توجد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 1 + \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$.

2. توجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 3x + 2$ على D في الحالات التالية:

(a) $D = (-\infty, \infty)$

(b) $D = [-2, 1]$

(c) $D = [-2, 3]$

(d) $D = (2, 3)$

6- الربط:

تُمدج الدالة: $V(x) = x(10 - 2x)(16 - 2x)$ حيث $0 < x < 5$ حجم صندوق أبعاده موجودة كعوامل في $V(x)$. أوجد قيمة x التي تعطي أكبر حجم لهذا الصندوق. ما أكبر حجم؟

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$= 4(x - 2)(3x - 20)$$

$$x = 2, x = \frac{20}{3}$$

القيمة $\frac{20}{3}$ غير مقبولة لأنها أكبر من 5.

x	0	2	5
$V'(x)$		+	-
$V(x)$	0 ↗	144 ↘	

وبالتالي الحجم الأكبر للصندوق يتحقق عند $x = 2$ وهو 144 وحدة مكعبة وأبعاده هي: 2، 6، 12.

7- أخطاء شائعة:

سيفترض بعض الطلاب أن النقطة الحرجة تناظر دائماً قيمة قصوى محلية؛ لذلك، من الضروري أن يلاحظ الطلاب بعض الأمثلة التي لا تتحقق فيها تلك العلاقة مثل $f(x) = x^3$. عند إيجاد النقاط الحرجة لدالة، سيتغاضى بعض الطلاب عن إيجاد النقاط حيثما تكون المشتقة غير معرفة بينما الدالة معرفة عند تلك النقاط مثل $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين $2-A$ ، $6-A$ ، $9-A$ ، $12-A$ ، $16-A$. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من فهمهم لمعنى قيم قصوى محلية وقيم قصوى.

9- مسألة اليوم:

وجد صاحب مصنع ثلاثيات أن الكلفة الكلية من x وحدة هي: $C(x) = 200x^2 + 300x + 9000$ بالدولار، علماً بأن سعر الثلاثة الواحدة يبلغ \$1200. (أ) إذا باع في أسبوع واحد x ثلاثة فما هي دالة الربح $P(x) = R(x) - C(x)$ ؟

$$R(x) = 1200x$$

$$P(x) = -20x^2 + 900x - 9000 = 0$$

(ب) أوجد قيم x عندما يكون $P(x) = 0$.

$$-20x^2 + 900x - 9000 = 0$$

$$x = 15, x = 30$$

حل (1): استكمال قيم قصوى مطلقة

القيم القصوى المطلقة تكون غالباً على الحواف ويمكن ملاحظتها في الشكل (3.2).

قيمة الحافة	نقطة D	القيم القصوى المطلقة فوق D
$x = 0$ و $y = 0$	$(0, 0)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة
أحد $x = 5$ و $y = 0$	$(5, 0)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة
أحد $x = 0$ و $y = 2$	$(0, 2)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة
أحد $x = 5$ و $y = 2$	$(5, 2)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة
أحد $x = 0$ و $y = 1$	$(0, 1)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة
أحد $x = 5$ و $y = 1$	$(5, 1)$	لا يوجد قيمة قصوى مطلقة

من خلال (3.2) أن الدالة قد لا يكون لها قيم قصوى أو صفري. وهذا لا يحدث مع الدوال الثلاثة على فترات مغلقة.

نظرية (3.1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالة مستمرة على فترتين مغلقتين $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة قصوى وقيمة صفري على هذه الفترة (الشكل (3.3)).

الشكل (3.3) يوضح نظرية القيمة القصوى. في الشكل (3.3.1) نرى دالة مستمرة على فترتين مغلقتين $[a, b]$ و $[c, d]$ ونلاحظ أن القيم القصوى والصفري تكون على الحواف. في الشكل (3.3.2) نرى دالة مستمرة على فترتين مفتوحتين (a, b) و (c, d) ونلاحظ أن القيم القصوى والصفري لا تكون على الحواف.

تعريف: النقطة الحرجة

النقطة الحرجة لدالة f هي نقطة داخلية في مجال الدالة يكون عندها $f'(x) = 0$ أو f' ليس لها وجود أو لا يمكن تعريفها. عند كل النقطة الحرجة في المجال يكون $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ ، وتعرف الأبي بـ "نقطة حرجية".

Critical Point

النقطة الحرجة لدالة f هي نقطة داخلية في مجال الدالة يكون عندها $f'(x) = 0$ أو f' ليس لها وجود أو لا يمكن تعريفها.

حل (2): إيجاد القيم القصوى المطلقة

لوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^{2/3}$ على الفترة $[-2, 3]$.

الخطوات:

- نجد قيم الدالة عند النقاط الحرجة وعند النقاط الطرفية. ونأخذ أكبر وأصغر القيم الناتجة.
- نجد القيم الحرجة: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
- نجد القيم الحرجة: $f'(x) = 0$ أو f' ليس لها وجود أو لا يمكن تعريفها. عند كل النقطة الحرجة في المجال يكون $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ ، وتعرف الأبي بـ "نقطة حرجية".
- نجد القيم الحرجة: $f'(x) = 0$ أو f' ليس لها وجود أو لا يمكن تعريفها. عند كل النقطة الحرجة في المجال يكون $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ ، وتعرف الأبي بـ "نقطة حرجية".
- نجد القيم الحرجة: $f'(x) = 0$ أو f' ليس لها وجود أو لا يمكن تعريفها. عند كل النقطة الحرجة في المجال يكون $f'(x) > 0$ أو $f'(x) < 0$ ، وتعرف الأبي بـ "نقطة حرجية".

نرى من خلال أن القيمة القصوى المطلقة للدالة هي $\frac{4}{27}$ ، وتوجد عند النقطة الحرجة $x = 3$. القيمة الصغرى المطلقة هي 0 وتوجد عند النقطة الطرفية $x = -2$.

النتيجة:

لوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^{2/3}$ على الفترة $[-2, 3]$.

إجابات التمارين في سياق الدرس 3-1

- (1) قيمة عظمى واحدة عند $x = \frac{\pi}{2}$ وهي 2 وقيمتان صغيرتان عند $x = 0$ و $x = \pi$. في الحالتين هي 1.
- (2) (a) لا يوجد.
(b) قيمتان: -18 ، 0.
(c) قيمة واحدة: -18 .
(d) لا يوجد.
- (3) القيمة العظمى المطلقة هي 1 عند $x = 1$.
القيمة الصغرى المطلقة هي $\frac{1}{9}$ عند $x = 3$.
- (4) قيمة عظمى مطلقة 1 عند $x = 2$.
قيمة صغرى مطلقة 0 عند $x = 1$ ، $x = 3$.

إجابات التمارين التمهيدي للدرس 3-2

- (1) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
(2) $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
(3) $[-2, 2]$
(4) $[-2, 2]$
(5) $(-2, 2)$

(6) $x \neq 1$ و $x \neq -1$

- (7) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
(8) $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
(9) $c = 3$
(10) $c = -4$

حل (1): إيجاد القيم القصوى لـ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

الدالة معرفة فقط على $x \neq \pm 2$ ، لذلك فإن مجالها الفترة $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.
لنستعمل طريقة المشتقات لإيجاد القيم القصوى. نحسب أن تقع عند النقاط الحرجة. أيضاً نكتب $f'(x)$ ونجد المشتقة $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$

للتأكد: $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$

النقطة الحرجة $x = 0$ هي $x = 0$ لأن $f'(x) = 0$ عند $x = 0$. لذلك فإن القيمة الحرجة $f(0) = -\frac{1}{4}$.

للتأكد من أن $x = 0$ هي قيمة قصوى لـ $f(x)$ نستخدم اختبار المشتقة الثانية. نحسب $f''(x) = \frac{2x^3 + 8x}{(x^2 - 4)^3}$. عند $x = 0$ ، $f''(0) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4} < 0$ ، وهذا يعني أن $x = 0$ هي قيمة قصوى محلية.

أيضاً لا ننسى أن $f(x)$ لها قيم قصوى عند النقاط الحدية $x = -2$ و $x = 2$.
عند $x = -2$ ، $f(x)$ ليس له قيمة قصوى محلية. عند $x = 2$ ، $f(x)$ ليس له قيمة قصوى محلية.

لذلك فإن القيم القصوى لـ $f(x)$ هي $f(0) = -\frac{1}{4}$ و $f(x)$ ليس له قيمة قصوى محلية عند $x = -2$ و $x = 2$.

حل (2): إيجاد القيم القصوى لـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 3}$

الدالة معرفة فقط على $x \geq -3$ و $x \leq 1$ ، لذلك فإن مجالها الفترة $[-3, 1]$.
لنستعمل طريقة المشتقات لإيجاد القيم القصوى. نحسب أن تقع عند النقاط الحرجة. أيضاً نكتب $f'(x)$ ونجد المشتقة $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x - 3}}$

للتأكد: $f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x - 3}}$

النقطة الحرجة $x = -2$ هي $x = -2$ لأن $f'(x) = 0$ عند $x = -2$. لذلك فإن القيمة الحرجة $f(-2) = \sqrt{(-2)^2 + 4(-2) - 3} = \sqrt{4 - 8 - 3} = \sqrt{-7}$.

للتأكد من أن $x = -2$ هي قيمة قصوى لـ $f(x)$ نستخدم اختبار المشتقة الثانية. نحسب $f''(x) = \frac{-x-2}{(x^2 + 4x - 3)^{3/2}}$. عند $x = -2$ ، $f''(-2) = \frac{-(-2)-2}{((-2)^2 + 4(-2) - 3)^{3/2}} = \frac{0}{(-7)^{3/2}} = 0$ ، وهذا يعني أن $x = -2$ هي قيمة قصوى محلية.

أيضاً لا ننسى أن $f(x)$ لها قيم قصوى عند النقاط الحدية $x = -3$ و $x = 1$.
عند $x = -3$ ، $f(x) = \sqrt{(-3)^2 + 4(-3) - 3} = \sqrt{9 - 12 - 3} = \sqrt{-6}$.
عند $x = 1$ ، $f(x) = \sqrt{1^2 + 4(1) - 3} = \sqrt{1 + 4 - 3} = \sqrt{2}$.

لذلك فإن القيم القصوى لـ $f(x)$ هي $f(-2) = \sqrt{-7}$ و $f(1) = \sqrt{2}$.

التمرين التمهيدي للدرس 3-2

1. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $2x^2 - 6 < 0$

2. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $2x^2 - 6 > 0$

3. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

4. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

5. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

6. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

7. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

8. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

9. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

10. في التمرين 21، أوجد المجال الذي تعينه المعادلة $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

3-2 الدوال المتزايدة والمتناقصة

1- الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على تطبيق نظرية القيمة المتوسطة وإيجاد الفترات من المجال، حيث تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

نظرية القيمة المتوسطة، تفسير فيزيائي، تزايد الدوال وتناقصها.

3- الأدوات والوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

(أ) اطلب إلى الطلاب إيجاد مشتقة الدالة. $f'(x) = 2x - 4$

(ب) اسألهم حل ما يلي:

(a) $f'(x) = 0$ $x = 2$

(b) $f'(x) > 0$ $x > 2$

(c) $f'(x) < 0$ $x < 2$

(ج) اطلب إليهم إكمال الجدول التالي.

x	-1	0	1	2	3	4
$f'(x)$						
$f(x)$						

(د) اسألهم ماذا يلاحظون بالنسبة إلى إشارة $f'(x)$ وتغير سلوك $f(x)$ لقيم $x < 2$ وقيم $x > 2$.

5- التدريس:

لإثارة دوافع الطلاب إلى دراسة نظرية القيمة المتوسطة، قد ترغب في أن تبدأ هذا الدرس بمناقشة تطبيق سهل مثل تلك التطبيقات المقدمة في مثال (3).

خذ بعض الوقت في مناقشة كل من فروض ونتائج نظرية القيمة المتوسطة. أهمية نظرية القيمة المتوسطة هي أنها تسمح لنا باستنتاج خواص دالة من مشتقتها.

في نتيجة (1)، لاحظ استخدام فترات مفتوحة ومغلقة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة. ويحتاج الطلاب إلى أن يفهموا أن العبارة f متزايدة في الفترة $[a, b]$ لا تعني أن $f'(a) > 0$ أو $f'(b) > 0$. وينبغي أن يفهموا – كذلك – أنه إذا كانت f متزايدة في الفترة $[a, b]$ ومتناقصة في الفترة $[b, c]$ ، فإن ذلك لا يعني أن f تكون «متزايدة ومتناقصة» عند النقطة b .

مثال (1): إيجاد القيم المتطرفة لـ $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x \leq 1 \\ x+2 & x > 1 \end{cases}$

في مثال (1)، انظر إلى المنطقة:

المنطقة الوحيدة التي عندما $f' = 0$ هي $x = 0$. ماذا يحدث عند $x = 1$ ؟ عند $x = 1$ تكون المنطقة جهة اليمين والمنطقة جهة اليسار على الترتيب:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+3) - 3}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{h} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+2 - 3}{h} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0}{h} = 0$

بما أن المشتقتين جهتي اليمين واليسار مختلفتان، فإن الدالة ليس لها منطقة عند $x = 1$ وهي نقطة حرجية للدالة.

المجال $(-\infty, \infty)$ ليس له نقاط حرجية. لذلك فالقيم الحرجية للدالة هي يمكن أن تكون قيمًا قصوى محليًا من تلك التي توجد عند النقاط الطرفية: $f(1) = 3$ ، $f(0) = 3$ ، $f(1) = 3$ ، $f(2) = 4$ ، $f(3) = 5$ ، $f(4) = 6$ ، $f(5) = 7$ ، $f(6) = 8$ ، $f(7) = 9$ ، $f(8) = 10$ ، $f(9) = 11$ ، $f(10) = 12$ ، $f(11) = 13$ ، $f(12) = 14$ ، $f(13) = 15$ ، $f(14) = 16$ ، $f(15) = 17$ ، $f(16) = 18$ ، $f(17) = 19$ ، $f(18) = 20$ ، $f(19) = 21$ ، $f(20) = 22$ ، $f(21) = 23$ ، $f(22) = 24$ ، $f(23) = 25$ ، $f(24) = 26$ ، $f(25) = 27$ ، $f(26) = 28$ ، $f(27) = 29$ ، $f(28) = 30$ ، $f(29) = 31$ ، $f(30) = 32$ ، $f(31) = 33$ ، $f(32) = 34$ ، $f(33) = 35$ ، $f(34) = 36$ ، $f(35) = 37$ ، $f(36) = 38$ ، $f(37) = 39$ ، $f(38) = 40$ ، $f(39) = 41$ ، $f(40) = 42$ ، $f(41) = 43$ ، $f(42) = 44$ ، $f(43) = 45$ ، $f(44) = 46$ ، $f(45) = 47$ ، $f(46) = 48$ ، $f(47) = 49$ ، $f(48) = 50$ ، $f(49) = 51$ ، $f(50) = 52$ ، $f(51) = 53$ ، $f(52) = 54$ ، $f(53) = 55$ ، $f(54) = 56$ ، $f(55) = 57$ ، $f(56) = 58$ ، $f(57) = 59$ ، $f(58) = 60$ ، $f(59) = 61$ ، $f(60) = 62$ ، $f(61) = 63$ ، $f(62) = 64$ ، $f(63) = 65$ ، $f(64) = 66$ ، $f(65) = 67$ ، $f(66) = 68$ ، $f(67) = 69$ ، $f(68) = 70$ ، $f(69) = 71$ ، $f(70) = 72$ ، $f(71) = 73$ ، $f(72) = 74$ ، $f(73) = 75$ ، $f(74) = 76$ ، $f(75) = 77$ ، $f(76) = 78$ ، $f(77) = 79$ ، $f(78) = 80$ ، $f(79) = 81$ ، $f(80) = 82$ ، $f(81) = 83$ ، $f(82) = 84$ ، $f(83) = 85$ ، $f(84) = 86$ ، $f(85) = 87$ ، $f(86) = 88$ ، $f(87) = 89$ ، $f(88) = 90$ ، $f(89) = 91$ ، $f(90) = 92$ ، $f(91) = 93$ ، $f(92) = 94$ ، $f(93) = 95$ ، $f(94) = 96$ ، $f(95) = 97$ ، $f(96) = 98$ ، $f(97) = 99$ ، $f(98) = 100$ ، $f(99) = 101$ ، $f(100) = 102$ ، $f(101) = 103$ ، $f(102) = 104$ ، $f(103) = 105$ ، $f(104) = 106$ ، $f(105) = 107$ ، $f(106) = 108$ ، $f(107) = 109$ ، $f(108) = 110$ ، $f(109) = 111$ ، $f(110) = 112$ ، $f(111) = 113$ ، $f(112) = 114$ ، $f(113) = 115$ ، $f(114) = 116$ ، $f(115) = 117$ ، $f(116) = 118$ ، $f(117) = 119$ ، $f(118) = 120$ ، $f(119) = 121$ ، $f(120) = 122$ ، $f(121) = 123$ ، $f(122) = 124$ ، $f(123) = 125$ ، $f(124) = 126$ ، $f(125) = 127$ ، $f(126) = 128$ ، $f(127) = 129$ ، $f(128) = 130$ ، $f(129) = 131$ ، $f(130) = 132$ ، $f(131) = 133$ ، $f(132) = 134$ ، $f(133) = 135$ ، $f(134) = 136$ ، $f(135) = 137$ ، $f(136) = 138$ ، $f(137) = 139$ ، $f(138) = 140$ ، $f(139) = 141$ ، $f(140) = 142$ ، $f(141) = 143$ ، $f(142) = 144$ ، $f(143) = 145$ ، $f(144) = 146$ ، $f(145) = 147$ ، $f(146) = 148$ ، $f(147) = 149$ ، $f(148) = 150$ ، $f(149) = 151$ ، $f(150) = 152$ ، $f(151) = 153$ ، $f(152) = 154$ ، $f(153) = 155$ ، $f(154) = 156$ ، $f(155) = 157$ ، $f(156) = 158$ ، $f(157) = 159$ ، $f(158) = 160$ ، $f(159) = 161$ ، $f(160) = 162$ ، $f(161) = 163$ ، $f(162) = 164$ ، $f(163) = 165$ ، $f(164) = 166$ ، $f(165) = 167$ ، $f(166) = 168$ ، $f(167) = 169$ ، $f(168) = 170$ ، $f(169) = 171$ ، $f(170) = 172$ ، $f(171) = 173$ ، $f(172) = 174$ ، $f(173) = 175$ ، $f(174) = 176$ ، $f(175) = 177$ ، $f(176) = 178$ ، $f(177) = 179$ ، $f(178) = 180$ ، $f(179) = 181$ ، $f(180) = 182$ ، $f(181) = 183$ ، $f(182) = 184$ ، $f(183) = 185$ ، $f(184) = 186$ ، $f(185) = 187$ ، $f(186) = 188$ ، $f(187) = 189$ ، $f(188) = 190$ ، $f(189) = 191$ ، $f(190) = 192$ ، $f(191) = 193$ ، $f(192) = 194$ ، $f(193) = 195$ ، $f(194) = 196$ ، $f(195) = 197$ ، $f(196) = 198$ ، $f(197) = 199$ ، $f(198) = 200$ ، $f(199) = 201$ ، $f(200) = 202$ ، $f(201) = 203$ ، $f(202) = 204$ ، $f(203) = 205$ ، $f(204) = 206$ ، $f(205) = 207$ ، $f(206) = 208$ ، $f(207) = 209$ ، $f(208) = 210$ ، $f(209) = 211$ ، $f(210) = 212$ ، $f(211) = 213$ ، $f(212) = 214$ ، $f(213) = 215$ ، $f(214) = 216$ ، $f(215) = 217$ ، $f(216) = 218$ ، $f(217) = 219$ ، $f(218) = 220$ ، $f(219) = 221$ ، $f(220) = 222$ ، $f(221) = 223$ ، $f(222) = 224$ ، $f(223) = 225$ ، $f(224) = 226$ ، $f(225) = 227$ ، $f(226) = 228$ ، $f(227) = 229$ ، $f(228) = 230$ ، $f(229) = 231$ ، $f(230) = 232$ ، $f(231) = 233$ ، $f(232) = 234$ ، $f(233) = 235$ ، $f(234) = 236$ ، $f(235) = 237$ ، $f(236) = 238$ ، $f(237) = 239$ ، $f(238) = 240$ ، $f(239) = 241$ ، $f(240) = 242$ ، $f(241) = 243$ ، $f(242) = 244$ ، $f(243) = 245$ ، $f(244) = 246$ ، $f(245) = 247$ ، $f(246) = 248$ ، $f(247) = 249$ ، $f(248) = 250$ ، $f(249) = 251$ ، $f(250) = 252$ ، $f(251) = 253$ ، $f(252) = 254$ ، $f(253) = 255$ ، $f(254) = 256$ ، $f(255) = 257$ ، $f(256) = 258$ ، $f(257) = 259$ ، $f(258) = 260$ ، $f(259) = 261$ ، $f(260) = 262$ ، $f(261) = 263$ ، $f(262) = 264$ ، $f(263) = 265$ ، $f(264) = 266$ ، $f(265) = 267$ ، $f(266) = 268$ ، $f(267) = 269$ ، $f(268) = 270$ ، $f(269) = 271$ ، $f(270) = 272$ ، $f(271) = 273$ ، $f(272) = 274$ ، $f(273) = 275$ ، $f(274) = 276$ ، $f(275) = 277$ ، $f(276) = 278$ ، $f(277) = 279$ ، $f(278) = 280$ ، $f(279) = 281$ ، $f(280) = 282$ ، $f(281) = 283$ ، $f(282) = 284$ ، $f(283) = 285$ ، $f(284) = 286$ ، $f(285) = 287$ ، $f(286) = 288$ ، $f(287) = 289$ ، $f(288) = 290$ ، $f(289) = 291$ ، $f(290) = 292$ ، $f(291) = 293$ ، $f(292) = 294$ ، $f(293) = 295$ ، $f(294) = 296$ ، $f(295) = 297$ ، $f(296) = 298$ ، $f(297) = 299$ ، $f(298) = 300$ ، $f(299) = 301$ ، $f(300) = 302$ ، $f(301) = 303$ ، $f(302) = 304$ ، $f(303) = 305$ ، $f(304) = 306$ ، $f(305) = 307$ ، $f(306) = 308$ ، $f(307) = 309$ ، $f(308) = 310$ ، $f(309) = 311$ ، $f(310) = 312$ ، $f(311) = 313$ ، $f(312) = 314$ ، $f(313) = 315$ ، $f(314) = 316$ ، $f(315) = 317$ ، $f(316) = 318$ ، $f(317) = 319$ ، $f(318) = 320$ ، $f(319) = 321$ ، $f(320) = 322$ ، $f(321) = 323$ ، $f(322) = 324$ ، $f(323) = 325$ ، $f(324) = 326$ ، $f(325) = 327$ ، $f(326) = 328$ ، $f(327) = 329$ ، $f(328) = 330$ ، $f(329) = 331$ ، $f(330) = 332$ ، $f(331) = 333$ ، $f(332) = 334$ ، $f(333) = 335$ ، $f(334) = 336$ ، $f(335) = 337$ ، $f(336) = 338$ ، $f(337) = 339$ ، $f(338) = 340$ ، $f(339) = 341$ ، $f(340) = 342$ ، $f(341) = 343$ ، $f(342) = 344$ ، $f(343) = 345$ ، $f(344) = 346$ ، $f(345) = 347$ ، $f(346) = 348$ ، $f(347) = 349$ ، $f(348) = 350$ ، $f(349) = 351$ ، $f(350) = 352$ ، $f(351) = 353$ ، $f(352) = 354$ ، $f(353) = 355$ ، $f(354) = 356$ ، $f(355) = 357$ ، $f(356) = 358$ ، $f(357) = 359$ ، $f(358) = 360$ ، $f(359) = 361$ ، $f(360) = 362$ ، $f(361) = 363$ ، $f(362) = 364$ ، $f(363) = 365$ ، $f(364) = 366$ ، $f(365) = 367$ ، $f(366) = 368$ ، $f(367) = 369$ ، $f(368) = 370$ ، $f(369) = 371$ ، $f(370) = 372$ ، $f(371) = 373$ ، $f(372) = 374$ ، $f(373) = 375$ ، $f(374) = 376$ ، $f(375) = 377$ ، $f(376) = 378$ ، $f(377) = 379$ ، $f(378) = 380$ ، $f(379) = 381$ ، $f(380) = 382$ ، $f(381) = 383$ ، $f(382) = 384$ ، $f(383) = 385$ ، $f(384) = 386$ ، $f(385) = 387$ ، $f(386) = 388$ ، $f(387) = 389$ ، $f(388) = 390$ ، $f(389) = 391$ ، $f(390) = 392$ ، $f(391) = 393$ ، $f(392) = 394$ ، $f(393) = 395$ ، $f(394) = 396$ ، $f(395) = 397$ ، $f(396) = 398$ ، $f(397) = 399$ ، $f(398) = 400$ ، $f(399) = 401$ ، $f(400) = 402$ ، $f(401) = 403$ ، $f(402) = 404$ ، $f(403) = 405$ ، $f(404) = 406$ ، $f(405) = 407$ ، $f(406) = 408$ ، $f(407) = 409$ ، $f(408) = 410$ ، $f(409) = 411$ ، $f(410) = 412$ ، $f(411) = 413$ ، $f(412) = 414$ ، $f(413) = 415$ ، $f(414) = 416$ ، $f(415) = 417$ ، $f(416) = 418$ ، $f(417) = 419$ ، $f(418) = 420$ ، $f(419) = 421$ ، $f(420) = 422$ ، $f(421) = 423$ ، $f(422) = 424$ ، $f(423) = 425$ ، $f(424) = 426$ ، $f(425) = 427$ ، $f(426) = 428$ ، $f(427) = 429$ ، $f(428) = 430$ ، $f(429) = 431$ ، $f(430) = 432$ ، $f(431) = 433$ ، $f(432) = 434$ ، $f(433) = 435$ ، $f(434) = 436$ ، $f(435) = 437$ ، $f(436) = 438$ ، $f(437) = 439$ ، $f(438) = 440$ ، $f(439) = 441$ ، $f(440) = 442$ ، $f(441) = 443$ ، $f(442) = 444$ ، $f(443) = 445$ ، $f(444) = 446$ ، $f(445) = 447$ ، $f(446) = 448$ ، $f(447) = 449$ ، $f(448) = 450$ ، $f(449) = 451$ ، $f(450) = 452$ ، $f(451) = 453$ ، $f(452) = 454$ ، $f(453) = 455$ ، $f(454) = 456$ ، $f(455) = 457$ ، $f(456) = 458$ ، $f(457) = 459$ ، $f(458) = 460$ ، $f(459) = 461$ ، $f(460) = 462$ ، $f(461) = 463$ ، $f(462) = 464$ ، $f(463) = 465$ ، $f(464) = 466$ ، $f(465) = 467$ ، $f(466) = 468$ ، $f(467) = 469$ ، $f(468) = 470$ ، $f(469) = 471$ ، $f(470) = 472$ ، $f(471) = 473$ ، $f(472) = 474$ ، $f(473) = 475$ ، $f(474) = 476$ ، $f(475) = 477$ ، $f(476) = 478$ ، $f(477) = 479$ ، $f(478) = 480$ ، $f(479) = 481$ ، $f(480) = 482$ ، $f(481) = 483$ ، $f(482) = 484$ ، $f(483) = 485$ ، $f(484) = 486$ ، $f(485) = 487$ ، $f(486) = 488$ ، $f(487) = 489$ ، $f(488) = 490$ ، $f(489) = 491$ ، $f(490) = 492$ ، $f(491) = 493$ ، $f(492) = 494$ ، $f(493) = 495$ ، $f(494) = 496$ ، $f(495) = 497$ ، $f(496) = 498$ ، $f(497) = 499$ ، $f(498) = 500$ ، $f(499) = 501$ ، $f(500) = 502$ ، $f(501) = 503$ ، $f(502) = 504$ ، $f(503) = 505$ ، $f(504) = 506$ ، $f(505) = 507$ ، $f(506) = 508$ ، $f(507) = 509$ ، $f(508) = 510$ ، $f(509) = 511$ ، $f(510) = 512$ ، $f(511) = 513$ ، $f(512) = 514$ ، $f(513) = 515$ ، $f(514) = 516$ ، $f(515) = 517$ ، $f(516) = 518$ ، $f(517) = 519$ ، $f(518) = 520$ ، $f(519) = 521$ ، $f(520) = 522$ ، $f(521) = 523$ ، $f(522) = 524$ ، $f(523) = 525$ ، $f(524) = 526$ ، $f(525) = 527$ ، $f(526) = 528$ ، $f(527) = 529$ ، $f(528) = 530$ ، $f(529) = 531$ ، $f(530) = 532$ ، $f(531) = 533$ ، $f(532) = 534$ ، $f(533) = 535$ ، $f(534) = 536$ ، $f(535) = 537$ ، $f(536) = 538$ ، $f(537) = 539$ ، $f(538) = 540$ ، $f(539) = 541$ ، $f(540) = 542$ ، $f(541) = 543$ ، $f(542) = 544$ ، $f(543) = 545$ ، $f(544) = 546$ ، $f(545) = 547$ ، $f(546) = 548$ ، $f(547) = 549$ ، $f(548) = 550$ ، $f(549) = 551$ ، $f(550) = 552$ ، $f(551) = 553$ ، $f(552) = 554$ ، $f(553) = 555$ ، $f(554) = 556$ ، $f(555) = 557$ ، $f(556) = 558$ ، $f(557) = 559$ ، $f(558) = 560$ ، $f(559) = 561$ ، $f(560) = 562$ ، $f(561) = 563$ ، $f(562) = 564$ ، $f(563) = 565$ ، $f(564) = 566$ ، $f(565) = 567$ ، $f(566) = 568$ ، $f(567) = 569$ ، $f(568) = 570$ ، $f(569) = 571$ ، $f(570) = 572$ ، $f(571) = 573$ ، $f(572) = 574$ ، $f(573) = 575$ ، $f(574) = 576$ ، $f(575) = 577$ ، $f(576) = 578$ ، $f(577) = 579$ ، $f(578) = 580$ ، $f(579) = 581$ ، $f(580) = 582$ ، $f(581) = 583$ ، $f(582) = 584$ ، $f(583) = 585$ ، $f(584) = 586$ ، $f(585) = 587$ ، $f(586) = 588$ ، $f(587) = 589$ ، $f(588) = 590$ ، $f(589) = 591$ ، $f(590) = 592$ ، $f(591) = 593$ ، $f(592) = 594$ ، $f(593) = 595$ ، $f(594) = 596$ ، $f(595) = 597$ ، $f(596) = 598$ ، $f(597) = 599$ ، $f(598) = 600$ ، $f(599) = 601$ ، $f(600) = 602$ ، $f(601) = 603$ ، $f(602) = 604$ ، $f(603) = 605$ ، $f(604) = 606$ ، $f(605) = 607$ ، $f(606) = 608$ ، $f(607) = 609$ ، $f(608) = 610$ ، $f(609) = 611$ ، $f(610) = 612$ ، $f(611) = 613$ ، $f(612) = 614$ ، $f(613) = 615$ ، $f(614) = 616$ ، $f(615) = 617$ ، $f(616) = 618$ ، $f(617) = 619$ ، $f(618) = 620$ ، $f(619) = 621$ ، $f(620) = 622$ ، $f(621) = 623$ ، $f(622) = 624$ ، $f(623) = 625$ ، $f(624) = 626$ ، $f(625) = 627$ ، $f(626) = 628$ ، $f(627) = 629$ ،

ملاحظات على الأمثلة:

- يوفر مثال (3) تطبيقاً من واقع الحياة لنظرية القيمة المتوسطة عن طريق إظهار الترابط بين المتوسطات والمعدلات اللحظية.
- يركز مثال (4) على استخدام الفترات المغلقة (باستثناء $-\infty$ و ∞) حيثما تتزايد الدالة أو تتناقص.

6- الربط:

التمرین رقم B-17.

7- أخطاء شائعة:

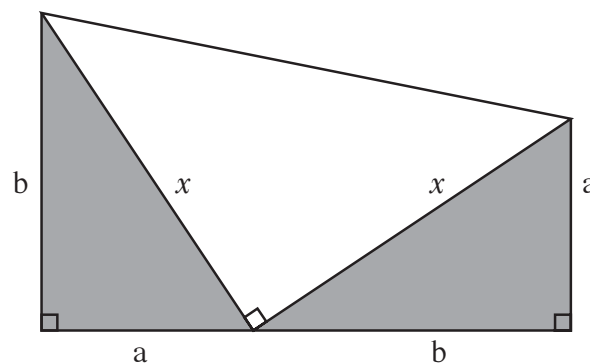
عند تطبيق نتيجة (1) لتحديد أين تكون الدالة f متزايدة، يمكن أن تقع أخطاء عند حل المتباينة $f'(x) > 0$ ، إما بتحليل خطأ للدالة $f'(x)$ أو بخطأ في تحليل الإشارة. ينبغي أن يمكن التأكيد البياني الطلاب من اكتشاف مثل هذه الأخطاء. يجد بعض الطلاب صعوبة في استخدام فترات مغلقة في وصف أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين 1-A، 4-A، 8-A، 9-A. تحقق من عمل الطلاب. تأكد من أنهم قد فهموا تزايد الدوال وتناقصها والقيمة المتوسطة.

9- مسألة اليوم:

استخدم قيم مساحات مناسبة لثبت من خلال هذا الرسم أن $x^2 = a^2 + b^2$ (ملاحظة: يمنع رسم أي خطوط إضافية).



— مساحة شبه المنحرف:

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2}$$

— مساحة المثلثين المظللين: $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$

– مساحة المثلث غير المظلل: $\frac{x^2}{2}$

المعادلة: $ab + \frac{x^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{2}$

— إذاً : $x^2 = a^2 + b^2$

المشتق بطريقة القيمة المتوسطة

مثال 1: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

على هذه الفترة

الحل:

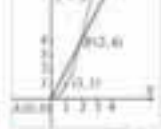
المشتق $y' = f'(x)$ مشتق $f(x)$ على الفترة $[0, 2]$ وفيه لا يتغير على $(0, 2)$. بما أن $f(2) = 4$ ، $f(0) = 0$ ، بطريقة القيمة المتوسطة نحصل على c في الفترة $(0, 2)$ حيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2 \Rightarrow f'(c) = 2$$

فإن

المشتق المشتق $y' = f'(x) = 2x$ عند $x = 2$ ونقري c الذي حصلنا عليه $B(2, 4)$ ، الشكل (3.10).



شكل (3.10)
المثال 1

مثال 2: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$. لم تكن y' في البداية.

مثال 3: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

المشتق بطريقة القيمة المتوسطة

مثال 1: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

الحل:

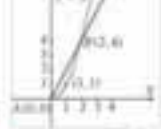
المشتق $y' = f'(x)$ مشتق $f(x)$ على الفترة $[0, 2]$ وفيه لا يتغير على $(0, 2)$. بما أن $f(2) = 4$ ، $f(0) = 0$ ، بطريقة القيمة المتوسطة نحصل على c في الفترة $(0, 2)$ حيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2 \Rightarrow f'(c) = 2$$

فإن

المشتق المشتق $y' = f'(x) = 2x$ عند $x = 2$ ونقري c الذي حصلنا عليه $B(2, 4)$ ، الشكل (3.10).



شكل (3.10)
المثال 1

مثال 2: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$. لم تكن y' في البداية.

مثال 3: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

المشتق بطريقة القيمة المتوسطة

مثال 1: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

الحل:

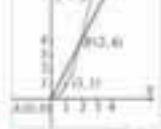
المشتق $y' = f'(x)$ مشتق $f(x)$ على الفترة $[0, 2]$ وفيه لا يتغير على $(0, 2)$. بما أن $f(2) = 4$ ، $f(0) = 0$ ، بطريقة القيمة المتوسطة نحصل على c في الفترة $(0, 2)$ حيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 2 \Rightarrow f'(c) = 2$$

فإن

المشتق المشتق $y' = f'(x) = 2x$ عند $x = 2$ ونقري c الذي حصلنا عليه $B(2, 4)$ ، الشكل (3.10).



شكل (3.10)
المثال 1

مثال 2: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$. لم تكن y' في البداية.

مثال 3: أوجد المشتق y' من $f(x) = x^2 - 2x + 1$ باستخدام شروط القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$. لم تكن y' في البداية.

مثال (14): حلّياً وليد وعاطف التمر موسم الحبة

المعادلة $x^2 = 0$ تكون (3.14) تكون:

(أ) متباينة على $(-\infty, 0)$ $\sqrt{x} > 0$ أي على $(-\infty, 0)$.

(ب) متباينة على $(0, \infty)$ $\sqrt{x} > 0$ أي على $(0, \infty)$.

شكل (3.14):

مثال (15): حلّياً وليد وعاطف التمر موسم الحبة

ليكن التمر موسم الحبة $x^2 - 4x = 0$ وليد وعاطف:

المعادلة $x^2 - 4x = 0$ حيث $x^2 - 4 > 0$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$x^2 > 4$$

$$x > \sqrt{4} \text{ أو } x < -\sqrt{4}$$

المعادلة $x^2 - 4x = 0$ حيث $x^2 - 4 < 0$

$$x^2 - 4 < 0$$

$$x^2 < 4$$

$$-\sqrt{4} < x < \sqrt{4}$$

ثم نكتب الفترة باستخدام الطريقة (3.15) $-\sqrt{4} < x < \sqrt{4}$ أي أن التمر موسم الحبة على الفترة $(-\infty, -\sqrt{4}) \cup (-\sqrt{4}, \sqrt{4}) \cup (\sqrt{4}, \infty)$ والتخلص على الفترة $[-\sqrt{4}, \sqrt{4}]$.

شكل (3.15):

فترة التمر موسم الحبة

فترة التمر موسم الحبة $x^2 - 4x = 0$ بالمرسوم

التي تكون المنطقة

في الفترة $x^2 - 4x = 0$

في الفترة $x^2 - 4x = 0$

في الفترة $x^2 - 4x = 0$

التمر موسم الحبة

يتم التمر موسم الحبة في الفترة (3.15) أي أن التمر موسم الحبة $-\infty$ إلى الأبدان التمر موسم الحبة

فترة التمر موسم الحبة، والمتباينة بين التمر موسم الحبة، والتمر موسم الحبة، والتمر موسم الحبة

فترة التمر موسم الحبة، والتمر موسم الحبة، والتمر موسم الحبة

مع التمر موسم الحبة

في مثال (15)، الفترة الدقيقة حيث تكون المعادلة $x^2 - 4x = 0$ التخلص عليها هي الفترة $[-\sqrt{4}, \sqrt{4}]$ ولذا ومنشأها بالصورة (3.15) $[-\sqrt{4}, \sqrt{4}]$ ، وبالطريقة التمر موسم الحبة

من التمر موسم الحبة، التمر موسم الحبة، التمر موسم الحبة

ليكن التمر موسم الحبة وليد وعاطف

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 2-3

- (1) الدالة $f(x) = x^3 + 1$ متصلة على الفترة $[-3, 1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-3, 1)$ حيث: $f'(x) = 3x^2$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{2 - (-26)}{4} = 7$$

$$3c^2 = 7$$

$$c = -\sqrt{\frac{7}{3}}$$

- (2) الدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ متصلة على الفترة $[0, 2]$

وقابلة للاشتقاق على $(0, 2)$ حيث:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1$$

$$3c^2 - 4c + 1 = 1$$

$$c = 0, \quad c = \frac{4}{3}$$

$$\therefore c = \frac{4}{3}$$

- (3) (a) تتزايد f على الفترة $\left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$ وتتناقص على $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right]$

- (b) تتزايد g على الفترة $(-\infty, -1]$ والفترة $[1, +\infty)$ وتتناقص على الفترة $[-1, 1]$.

مثال (17) **نموذج نظرية القيمة المتوسطة**

إذا سارت سيارة من الصفر مسافة 80 كيلومترًا في 3.52 دقيقة، فإن سرعتها المتوسطة في فترة الزمان هي: $\frac{80}{3.52} \approx 22.73$ كم/ساعة. إذا سارت السيارة في 3.52 دقيقة، فإن سرعتها المتوسطة هي: $\frac{80}{3.52} \approx 22.73$ كم/ساعة.

الدوال المتزايدة والمتناقصات

تعريف: الدالة f متزايدة (متناقصات) على الفترة $[a, b]$ إذا كان لكل $x_1, x_2 \in [a, b]$ حيث $x_1 < x_2$ ، فإن $f(x_1) \leq f(x_2)$ (أو $f(x_1) \geq f(x_2)$).

(1) دالة متزايدة على $[a, b]$ إذا كانت: $f(x_1) < f(x_2)$ حيث $x_1 < x_2$.

(2) دالة متناقصات على $[a, b]$ إذا كانت: $f(x_1) > f(x_2)$ حيث $x_1 < x_2$.

الدالة المتزايدة والمتناقصات

Functions

الدالة هي مجموعة من الأزواج (x, y) حيث x من مجموعة A و y من مجموعة B ، بحيث لكل $x \in A$ ، يوجد $y \in B$ واحد فقط.

دالة متزايدة

دالة متناقصات

مثال (18)

تلك الدالة المتزايدة من a إلى b التي تتحقق فيها: $f(a) = 0$ و $f(b) = 1$ ، وتلك الدالة المتناقصات من a إلى b التي تتحقق فيها: $f(a) = 1$ و $f(b) = 0$.

مثال (19) **الدوال المتزايدة والدوال المتناقصات**

تلك الدالة المتزايدة من a إلى b التي تتحقق فيها: $f(a) = 0$ و $f(b) = 1$.

(1) $f(x) = x^2$ على $[0, 1]$ متزايدة.

(2) $f(x) = x^2$ على $[-1, 0]$ متناقصات.

مخرج آخر

عرفنا أن الدوال المتزايدة والمتناقصات هي دوال متزايدة. يمكننا الآن أن نستعمل نظرية القيمة المتوسطة لنثبت بصورة مكافئة أن الدوال المتزايدة والمتناقصات هي دوال متزايدة.

مثال (20) **الدوال التي مشتقاتها $f'(x) = 0$ في دوال ثابتة**

إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة $[a, b]$ ، فإن f دالة ثابتة. حيث $f(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$.

البرهان

نحسب الفرق بين $f(x_2)$ و $f(x_1)$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة. إذا كانت $f'(x) = 0$ لكل $x \in [a, b]$ ، فإن $f(x_2) - f(x_1) = 0$ لكل $x_1, x_2 \in [a, b]$. وهذا يعني أن $f(x) = C$ لكل $x \in [a, b]$.

التمرين (التمرين 1-3)

* في التمرين (1, 2)، حلل العاين المتزايدة أو المتناقصات أو المتزايدة على الفترة $[a, b]$.

(1) $f(x) = x^2 - 9 < 0$ (2) $f(x) = x^2 - 4x > 0$

* في التمرين (3-4)، حلل العاين المتزايدة أو المتناقصات أو المتزايدة على الفترة $[a, b]$.

(1) $f(x) = x^2$ (2) $f(x) = x^2 - 2x$ (3) $f(x) = x^2$

* في التمرين (5-6)، حلل العاين المتزايدة أو المتناقصات أو المتزايدة على الفترة $[a, b]$.

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 3$ (2) $f(x) = \sin 2x$

(3) $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$ (4) $f(x) = 3x - 1$

[illegible]

ملاحظة (4): اعتبار الدالة الأولى القيم المتوسطة المحيطة

بمناطق الاختلاف الأولى على دالة مستقلة $f(x)$.

هذا أي شكله هو:

(1) إذا كانت الدالة f تتغير إيجابياً من التوجه إلى السالب عند $x = 0$ ، $f > 0$ عندما $x < 0$ ، $f < 0$ عندما $x > 0$ ، فإن الدالة تكون لها قيمة قطري حتمياً عند $x = 0$.

شكله هو:

(2) إذا تغيرت إشارة f من السالب إلى التوجه عند $x = 0$ ، $f < 0$ عندما $x < 0$ ، $f > 0$ عندما $x > 0$ ، فإن f يكون لها قيمة أخرى حتمياً عند $x = 0$.

شكله هو:

(3) إذا لم يتغير إشارة f عند $x = 0$ ، $f < 0$ عندما $x < 0$ ، $f < 0$ عندما $x > 0$ ، فإن f لا يكون لها قيمة إشارة حتمياً على جانبي a ، b ، فإن f لا يكون لها قيمة أخرى حتمياً عند $x = 0$.

شكله هو:

هذا شكله هو:

(4) إذا كانت $f < 0$ (أو $f > 0$) تكون $x > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة قطري حتمياً (أو) قيمة أخرى حتمياً عند القيمة $x = 0$.

شكله هو:

هذا شكله هو:

(5) إذا كانت $f < 0$ (أو $f > 0$) تكون $x < 0$ ، فإن الدالة تكون لها قيمة أخرى حتمياً (أو) قيمة قطري حتمياً عند $x = 0$.

شكله هو:

السّمات المهمة التي يشير إليها منحنى مرسوم، ويمكن أن يؤكد أن نافذة العرض المختارة لا تستبعد سمات مهمة من منحنى الدالة.

سوف يحتاج الطلاب إلى أن يتعلموا استخدام أحكامهم الشخصية لتقرير أي الاختبارات يطبقونها لإيجاد القيم القصوى المحلية لدالة. في بعض الأحيان تتطلب "y عملاً مطوّلاً لإيجادها جبرياً. قد يكون اختبار المشتقة الأولى أسهل من اختبار المشتقة الثانية. شجّع الطلاب على كتابة عبارات تصف ما يصلون إليه.

6- الربط:

لا يوجد.

7- أخطاء شائعة:

من المهم أن يفهم الطلاب أن الشرط $f'(c) = 0$ لا يضمن أن f لها قيمة قصوى محلية عند $(c, f(c))$. وبالمثل، يعبّن بعض الطلاب أي نقاط تكون عندها $f''(x) = 0$ كنقاط انقلاب. ذكرّ الطلاب أن تغييراً في التقعر ينبغي أن يكون موجوداً لكي يكون للدالة نقطة انقلاب.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين $2-A, 4-A, 6-A, 10-A$. تحقق من عمل الطلاب ثم تأكد من فهمهم لتأثير إشارة f' و f'' على الدالة f .

9- مسألة اليوم:

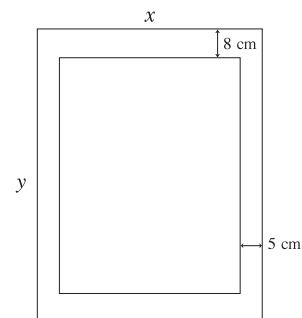
أراد أحد التجّار طبع لوحة إعلانات فاستخدم قطعة كرتون مستطيلة مساحتها 1 m^2 وأبعادها x و y بالسنتيمتر، على أن تكون الهوامش من الأعلى والأسفل 8 cm ومن الجوانب 5 cm . يريد معرفة قيم x و y كي تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن. (أ) أوجد قيمة المساحة المطبوعة بدلالة x فقط.

$$A(x) = -16x - \frac{100000}{x} + 10160$$

(ب) ما قيم x و y المناظرة للمساحة الكبرى المطبوعة؟

$$x \approx 80 \text{ cm}$$

$$y \approx 125 \text{ cm}$$



10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3-3

(1) (أ) النقاط الحرجة لـ $f: -1$ و 3

النقاط الحرجة لـ $g: 1, -1$

(ب) f : عظمى محلية: -6 عند $x = -1$

قيمة صغرى محلية: 2 عند $x = 3$

مثال (2): استعدوا! استخدم المشتقة الأولى

أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. وتوجد القيم القصوى المحلية من المنحني. من الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة وتلك التي تكون فيها متناقصة.

الدالة f متعادلة وقابلة للاشتقاق لكل الأعداد الحقيقية. لذلك تقع النقاط الحرجة عند الصفر للدالة f' (مثلاً (3.19)).

نكتب (3.19) في صيغة صيغة

نكتب (3.20)

نكتب (3.21)

نكتب (3.22)

نكتب (3.23)

نكتب (3.24)

نكتب (3.25)

نكتب (3.26)

نكتب (3.27)

نكتب (3.28)

نكتب (3.29)

نكتب (3.30)

نكتب (3.31)

نكتب (3.32)

نكتب (3.33)

نكتب (3.34)

نكتب (3.35)

نكتب (3.36)

نكتب (3.37)

نكتب (3.38)

نكتب (3.39)

نكتب (3.40)

نكتب (3.41)

نكتب (3.42)

نكتب (3.43)

نكتب (3.44)

نكتب (3.45)

نكتب (3.46)

نكتب (3.47)

نكتب (3.48)

نكتب (3.49)

نكتب (3.50)

نكتب (3.51)

نكتب (3.52)

نكتب (3.53)

نكتب (3.54)

نكتب (3.55)

نكتب (3.56)

نكتب (3.57)

نكتب (3.58)

نكتب (3.59)

نكتب (3.60)

نكتب (3.61)

نكتب (3.62)

نكتب (3.63)

نكتب (3.64)

نكتب (3.65)

نكتب (3.66)

نكتب (3.67)

نكتب (3.68)

نكتب (3.69)

نكتب (3.70)

نكتب (3.71)

نكتب (3.72)

نكتب (3.73)

نكتب (3.74)

نكتب (3.75)

نكتب (3.76)

نكتب (3.77)

نكتب (3.78)

نكتب (3.79)

نكتب (3.80)

نكتب (3.81)

نكتب (3.82)

نكتب (3.83)

نكتب (3.84)

نكتب (3.85)

نكتب (3.86)

نكتب (3.87)

نكتب (3.88)

نكتب (3.89)

نكتب (3.90)

نكتب (3.91)

نكتب (3.92)

نكتب (3.93)

نكتب (3.94)

نكتب (3.95)

نكتب (3.96)

نكتب (3.97)

نكتب (3.98)

نكتب (3.99)

نكتب (4.00)

نكتب (4.01)

نكتب (4.02)

نكتب (4.03)

نكتب (4.04)

نكتب (4.05)

نكتب (4.06)

نكتب (4.07)

نكتب (4.08)

نكتب (4.09)

نكتب (4.10)

نكتب (4.11)

نكتب (4.12)

نكتب (4.13)

نكتب (4.14)

نكتب (4.15)

نكتب (4.16)

نكتب (4.17)

نكتب (4.18)

نكتب (4.19)

نكتب (4.20)

نكتب (4.21)

نكتب (4.22)

نكتب (4.23)

نكتب (4.24)

نكتب (4.25)

نكتب (4.26)

نكتب (4.27)

نكتب (4.28)

نكتب (4.29)

نكتب (4.30)

نكتب (4.31)

نكتب (4.32)

نكتب (4.33)

نكتب (4.34)

نكتب (4.35)

نكتب (4.36)

نكتب (4.37)

نكتب (4.38)

نكتب (4.39)

نكتب (4.40)

نكتب (4.41)

نكتب (4.42)

نكتب (4.43)

نكتب (4.44)

نكتب (4.45)

نكتب (4.46)

نكتب (4.47)

نكتب (4.48)

نكتب (4.49)

نكتب (4.50)

نكتب (4.51)

نكتب (4.52)

نكتب (4.53)

نكتب (4.54)

نكتب (4.55)

نكتب (4.56)

نكتب (4.57)

نكتب (4.58)

نكتب (4.59)

نكتب (4.60)

نكتب (4.61)

نكتب (4.62)

نكتب (4.63)

نكتب (4.64)

نكتب (4.65)

نكتب (4.66)

نكتب (4.67)

نكتب (4.68)

نكتب (4.69)

نكتب (4.70)

نكتب (4.71)

نكتب (4.72)

نكتب (4.73)

نكتب (4.74)

نكتب (4.75)

نكتب (4.76)

نكتب (4.77)

نكتب (4.78)

نكتب (4.79)

نكتب (4.80)

نكتب (4.81)

نكتب (4.82)

نكتب (4.83)

نكتب (4.84)

نكتب (4.85)

نكتب (4.86)

نكتب (4.87)

نكتب (4.88)

نكتب (4.89)

نكتب (4.90)

نكتب (4.91)

نكتب (4.92)

نكتب (4.93)

نكتب (4.94)

نكتب (4.95)

نكتب (4.96)

نكتب (4.97)

نكتب (4.98)

نكتب (4.99)

نكتب (5.00)

نكتب (5.01)

نكتب (5.02)

نكتب (5.03)

نكتب (5.04)

نكتب (5.05)

نكتب (5.06)

نكتب (5.07)

نكتب (5.08)

نكتب (5.09)

نكتب (5.10)

نكتب (5.11)

نكتب (5.12)

نكتب (5.13)

نكتب (5.14)

نكتب (5.15)

نكتب (5.16)

نكتب (5.17)

نكتب (5.18)

نكتب (5.19)

نكتب (5.20)

نكتب (5.21)

نكتب (5.22)

نكتب (5.23)

نكتب (5.24)

نكتب (5.25)

نكتب (5.26)

نكتب (5.27)

نكتب (5.28)

نكتب (5.29)

نكتب (5.30)

نكتب (5.31)

نكتب (5.32)

نكتب (5.33)

نكتب (5.34)

نكتب (5.35)

نكتب (5.36)

نكتب (5.37)

نكتب (5.38)

نكتب (5.39)

نكتب (5.40)

نكتب (5.41)

نكتب (5.42)

نكتب (5.43)

نكتب (5.44)

نكتب (5.45)

نكتب (5.46)

نكتب (5.47)

نكتب (5.48)

نكتب (5.49)

نكتب (5.50)

نكتب (5.51)

نكتب (5.52)

نكتب (5.53)

نكتب (5.54)

نكتب (5.55)

نكتب (5.56)

نكتب (5.57)

نكتب (5.58)

نكتب (5.59)

نكتب (5.60)

نكتب (5.61)

نكتب (5.62)

نكتب (5.63)

نكتب (5.64)

نكتب (5.65)

نكتب (5.66)

نكتب (5.67)

نكتب (5.68)

نكتب (5.69)

نكتب (5.70)

نكتب (5.71)

نكتب (5.72)

نكتب (5.73)

نكتب (5.74)

نكتب (5.75)

نكتب (5.76)

نكتب (5.77)

نكتب (5.78)

نكتب (5.79)

نكتب (5.80)

نكتب (5.81)

نكتب (5.82)

نكتب (5.83)

نكتب (5.84)

نكتب (5.85)

نكتب (5.86)

نكتب (5.87)

نكتب (5.88)

نكتب (5.89)

نكتب (5.90)

نكتب (5.91)

نكتب (5.92)

نكتب (5.93)

نكتب (5.94)

نكتب (5.95)

نكتب (5.96)

نكتب (5.97)

نكتب (5.98)

نكتب (5.99)

نكتب (6.00)

نكتب (6.01)

نكتب (6.02)

نكتب (6.03)

نكتب (6.04)

نكتب (6.05)

نكتب (6.06)

نكتب (6.07)

نكتب (6.08)

نكتب (6.09)

نكتب (6.10)

نكتب (6.11)

نكتب (6.12)

نكتب (6.13)

نكتب (6.14)

نكتب (6.15)

نكتب (6.16)

نكتب (6.17)

نكتب (6.18)

نكتب (6.19)

نكتب (6.20)

نكتب (6.21)

نكتب (6.22)

نكتب (6.23)

نكتب (6.24)

نكتب (6.25)

نكتب (6.26)

نكتب (6.27)

نكتب (6.28)

نكتب (6.29)

نكتب (6.30)

نكتب (6.31)

نكتب (6.32)

نكتب (6.33)

نكتب (6.34)

نكتب (6.35)

نكتب (6.36)

نكتب (6.37)

نكتب (6.38)

نكتب (6.39)

نكتب (6.40)

نكتب (6.41)

نكتب (6.42)

نكتب (6.43)

نكتب (6.44)

نكتب (6.45)

نكتب (6.46)

نكتب (6.47)

نكتب (6.48)

نكتب (6.49)

نكتب (6.50)

نكتب (6.51)

نكتب (6.52)

نكتب (6.53)

نكتب (6.54)

نكتب (6.55)

نكتب (6.56)

نكتب (6.57)

نكتب (6.58)

نكتب (6.59)

نكتب (6.60)

نكتب (6.61)

نكتب (6.62)

نكتب (6.63)

نكتب (6.64)

نكتب (6.65)

نكتب (6.66)

نكتب (6.67)

نكتب (6.68)

نكتب (6.69)

نكتب (6.70)

نكتب (6.71)

نكتب (6.72)

نكتب (6.73)

نكتب (6.74)

نكتب (6.75)

نكتب (6.76)

نكتب (6.77)

نكتب (6.78)

نكتب (6.79)

نكتب (6.80)

نكتب (6.81)

نكتب (6.82)

نكتب (6.83)

نكتب (6.84)

نكتب (6.85)

نكتب (6.86)

نكتب (6.87)

نكتب (6.88)

نكتب (6.89)

نكتب (6.90)

نكتب (6.91)

نكتب (6.92)

نكتب (6.93)

نكتب (6.94)

نكتب (6.95)

نكتب (6.96)

نكتب (6.97)

نكتب (6.98)

نكتب (6.99)

نكتب (7.00)

نكتب (7.01)

نكتب (7.02)

نكتب (7.03)

نكتب (7.04)

نكتب (7.05)

نكتب (7.06)

نكتب (7.07)

نكتب (7.08)

نكتب (7.09)

نكتب (7.10)

نكتب (7.11)

نكتب (7.12)

نكتب (7.13)

نكتب (7.14)

نكتب (7.15)

نكتب (7.16)

نكتب (7.17)

نكتب (7.18)

نكتب (7.19)

نكتب (7.20)

نكتب (7.21)

نكتب (7.22)

نكتب (7.23)

نكتب (7.24)

نكتب (7.25)

نكتب (7.26)

نكتب (7.27)

نكتب (7.28)

نكتب (7.29)

نكتب (7.30)

نكتب (7.31)

نكتب (7.32)

نكتب (7.33)

نكتب (7.34)

نكتب (7.35)

نكتب (7.36)

نكتب (7.37)

نكتب (7.38)

نكتب (7.39)

نكتب (7.40)

نكتب (7.41)

نكتب (7.42)

نكتب (7.43)

نكتب (7.44)

نكتب (7.45)

نكتب (7.46)

نكتب (7.47)

نكتب (7.48)

نكتب (7.49)

نكتب (7.50)

نكتب (7.51)

نكتب (7.52)

نكتب (7.53)

نكتب (7.54)

نكتب (7.55)

نكتب (7.56)

نكتب (7.57)

نكتب (7.58)

نكتب (7.59)

نكتب (7.60)

نكتب (7.61)

نكتب (7.62)

نكتب (7.63)

نكتب (7.64)

نكتب (7.65)

نكتب (7.66)

نكتب (7.67)

نكتب (7.68)

نكتب (7.69)

نكتب (7.70)

نكتب (7.71)

نكتب (7.72)

نكتب (7.73)

نكتب (7.74)

نكتب (7.75)

نكتب (7.76)

نكتب (7.77)

نكتب (7.78)

نكتب (7.79)

نكتب (7.80)

نكتب (7.81)

نكتب (7.82)

نكتب (7.83)

نكتب (7.84)

نكتب (7.85)

نكتب (7.86)

نكتب (7.87)

نكتب (7.88)

نكتب (7.89)

نكتب (7.90)

نكتب (7.91)

نكتب (7.92)

نكتب (7.93)

نكتب (7.94)

نكتب (7.95)

نكتب (7.96)

نكتب (7.97)

نكتب (7.98)

نكتب (7.99)

نكتب (8.00)

نكتب (8.01)

نكتب (8.02)

نكتب (8.03)

نكتب (8.04)

نكتب (8.05)

نكتب (8.06)

نكتب (8.07)

نكتب (8.08)

نكتب (8.09)

نكتب (8.10)

نكتب (8.11)

نكتب (8.12)

نكتب (8.13)

نكتب (8.14)

نكتب (8.15)

نكتب (8.16)

نكتب (8.17)

نكتب (8.18)

نكتب (8.19)

نكتب (8.20)

نكتب (8.21)

نكتب (8.22)

نكتب (8.23)

نكتب (8.24)

نكتب (8.25)

نكتب (8.26)

نكتب (8.27)

نكتب (8.28)

نكتب (8.29)

نكتب (8.30)

نكتب (8.31)

نكتب (8.32)

نكتب (8.33)

نكتب (8.34)

نكتب (8.35)

نكتب (8.36)

نكتب (8.37)

نكتب (8.38)

نكتب (8.39)

نكتب (8.40)

نكتب (8.41)

نكتب (8.42)

نكتب (8.43)

نكتب (8.44)

نكتب (8.45)

نكتب (8.46)

نكتب (8.47)

نكتب (8.48)

نكتب (8.49)

نكتب (8.50)

نكتب (8.51)

نكتب (8.52)

نكتب (8.53)

نكتب (8.54)

نكتب (8.55)

نكتب (8.56)

نكتب (8.57)

نكتب (8.58)

نكتب (8.59)

نكتب (8.60)

نكتب (8.61)

نكتب (8.62)

نكتب (8.63)

نكتب (8.64)

نكتب (8.65)

نكتب (8.66)

نكتب (8.67)

نكتب (8.68)

نكتب (8.69)

نكتب (8.70)

نكتب (8.71)

نكتب (8.72)

نكتب (8.73)

نكتب (8.74)

نكتب (8.75)

نكتب (8.76)

نكتب (8.77)

نكتب (8.78)

نكتب (8.79)

نكتب (8.80)

نكتب (8.81)

نكتب (8.82)

نكتب (8.83)

نكتب (8.84)

نكتب (8.85)

نكتب (8.86)

نكتب (8.87)

نكتب (8.88)

نكتب (8.89)

نكتب (8.90)

نكتب (8.91)

نكتب (8.92)

نكتب (8.93)

نكتب (8.94)

نكتب (8.95)

نكتب (8.96)

نكتب (8.97)

نكتب (8.98)

نكتب (8.99)

نكتب (9.00)

نكتب (9.01)

نكتب (9.02)

نكتب (9.03)

نكتب (9.04)

نكتب (9.05)

نكتب (9.06)

نكتب (9.07)

نكتب (9.08)

نكتب (9.09)

نكتب (9.10)

نكتب (9.11)

نكتب (9.12)

نكتب (9.13)

نكتب (9.14)

نكتب (9.15)

نكتب (9.16)

نكتب (9.17)

نكتب (9.18)

نكتب (9.19)

نكتب (9.20)

نكتب (9.21)

نكتب (9.22)

نكتب (9.23)

نكتب (9.24)

نكتب (9.25)

نكتب (9.26)

نكتب (9.27)

نكتب (9.28)

نكتب (9.29)

نكتب (9.30)

نكتب (9.31)

نكتب (9.32)

نكتب (9.33)

نكتب (9.34)

نكتب (9.35)

نكتب (9.36)

نكتب (9.37)

نكتب (9.38)

نكتب (9.39)

نكتب (9.40)

نكتب (9.41)

نكتب (9.42)

نكتب (9.43)

نكتب (9.44)

نكتب (9.45)

نكتب (9.46)

نكتب (9.47)

نكتب (9.48)

نكتب (9.49)

نكتب (9.50)

نكتب (9.51)

نكتب (9.52)

نكتب (9.53)

نكتب (9.54)

نكتب (9.55)

نكتب (9.56)

نكتب (9.57)

نكتب (9.58)

نكتب (9.59)

نكتب (9.60)

نكتب (9.61)

نكتب (9.62)

نكتب (9.63)

نكتب (9.64)

نكتب (9.65)

نكتب (9.66)

نكتب (9.67)

نكتب (9.68)

نكتب (9.69)

نكتب (9.70)

نكتب (9.71)

نكتب (9.72)

نكتب (9.73)

نكتب (9.74)

نكتب (9.75)

نكتب (9.76)

نكتب (9.77)

نكتب (9.78)

نكتب (9.79)

نكتب (9.80)

نكتب (9.81)

نكتب (9.82)

نكتب (9.83)

نكتب (9.84)

نكتب (9.85)

نكتب (9.86)

نكتب (9.87)

نكتب (9.88)

نكتب (9.89)

نكتب (9.90)

نكتب (9.91)

نكتب (9.92)

نكتب (9.93)

نكتب (9.94)

نكتب (9.95)

نكتب (9.96)

نكتب (9.97)

نكتب (9.98)

نكتب (9.99)

نكتب (10.00)

نكتب (10.01)

نكتب (10.02)

نكتب (10.03)

نكتب (10.04)

نكتب (10.05)

نكتب (10.06)

نكتب (10.07)

نكتب (10.08)

نكتب (10.09)

نكتب (10.10)

نكتب (10.11)

نكتب (10.12)

نكتب (10.13)

نكتب (10.14)

نكتب (10.15)

نكتب (10.16)

نكتب (10.17)

نكتب (10.18)

نكتب (10.19)

نكتب (10.20)

نكتب (10.21)

نكتب (10.22)

نكتب (10.23)

نكتب (10.24)

نكتب (10.25)

نكتب (10.26)

نكتب (10.27)

نكتب (10.28)

نكتب (10.29)

نكتب (10.30)

نكتب (10.31)

نكتب (10.32)

نكتب (10.33)

نكتب (10.34)

نكتب (10.35)

نكتب (10.36)

نكتب (10.37)

نكتب (10.38)

نكتب (10.39)

نكتب (10.40)

نكتب (10.41)

نكتب (10.42)

نكتب (10.43)

نكتب (10.44)

نكتب (10.45)

نكتب (10.46)

نكتب (10.47)

نكتب (10.48)

نكتب (10.49)

نكتب (10.50)

نكتب (10.51)

نكتب (10.52)

نكتب (10.53)

نكتب (10.54)

نكتب (10.55)

نكتب (10.56)

نكتب (10.57)

نكتب (10.58)

نكتب (10.59)

نكتب (10.60)

نكتب (10.61)

نكتب (10.62)

نكتب (10.63)

نكتب (10.64)

نكتب (10.65)

نكتب (10.66)

نكتب (10.67)

نكتب (10.68)

نكتب (10.69)

نكتب (10.70)

نكتب (10.71)

نكتب (10.72)

نكتب (10.73)

نكتب (10.74)

نكتب (10.75)

نكتب (10.76)

نكتب (10.77)

نكتب (10.78)

نكتب (10.79)

نكتب (10.80)

نكتب (10.81)

نكتب (10.82)

نكتب (10.83)

نكتب (10.84)

نكتب (10.85)

نكتب (10.86)

نكتب (10.87)

نكتب (10.88)

نكتب (10.89)

نكتب (10.90)

نكتب (10.91)

نكتب (10.92)

نكتب (10.93)

نكتب (10.94)

نكتب (10.95)

نكتب (10.96)

نكتب (10.97)

نكتب (10.98)

نكتب (10.99)

نكتب (11.00)

نكتب (11.01)

نكتب (11.02)

نكتب (11.03)

نكتب (11.04)

نكتب (11.05)

نكتب (11.06)

نكتب (11.07)

نكتب (11.08)

نكتب (11.09)

نكتب (11.10)

نكتب (11.11)

نكتب (11.12)

نكتب (11.13)

نكتب (11.14)

نكتب (11.15)

نكتب (11.16)

نكتب (11.17)

نكتب (11.18)

نكتب (11.19)

نكتب (11.20)

نكتب (11.21)

نكتب (11.22)

نكتب (11.23)

نكتب (11.24)

نكتب (11.25)

نكتب (11.26)

نكتب (11.27)

نكتب (11.28)

نكتب (11.29)

نكتب (11.30)

نكتب (11.31)

نكتب (11.32)

نكتب (11.

g : قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x = -1$.

قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x = 1$.

(ج) f : متزايدة على $[3, \infty)$ وعلى $(-\infty, -1)$.

متناقصة على $(1, 3]$ وعلى $[-1, 1)$.

(2) مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty, \frac{2}{3})$.

مقعرة لأعلى على الفترة $(\frac{2}{3}, \infty)$.

(3) (أ) $(1, 3)$

(ب) $y = -3x + 6$

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 3-4

(1) لا يوجد

(2) عظمى محلية $(-2, 17)$

صغرى محلية $(1, -10)$

$$(3) \frac{200\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$(4) r \approx 4.01 \text{ cm}; h \approx 19.82 \text{ cm}$$

أو

$$r \approx 7.13 \text{ cm}; h \approx 6.26 \text{ cm}$$

$$(5) -\sin \alpha$$

$$(6) \cos \alpha$$

$$(7) \sin \alpha$$

$$(8) -\cos \alpha$$

$$(9) x = 1 \text{ و } y = \sqrt{3} \text{ أو } x = -1 \text{ و } y = -\sqrt{3}$$

$$(10) x = 0 \text{ و } y = 3 \text{ أو } x = -\frac{24}{13} \text{ و } y = \frac{15}{13}$$

المقطع

كما نلاحظ في الشكل (3.20)، فإن الدالة $y = x^3$ ترتفع مع تزايد x ، ولكن الأجزاء التي لا ترتفعها على الفترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$ تتجهل بطرفي المنحدر بالنظر إلى المنحدر.

كما نلاحظها من اليسار إلى اليمين، نلاحظ أن المنحدر هو السهمي ينحصر على الفترة $(-\infty, 0)$ ثم يزداد على الفترة $(0, \infty)$ السهمي $y = x^3$ و مقعر لأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعر لأعلى على الفترة $(0, \infty)$. يقع السهمي أسفل المنحدر حينما يكون مقعر لأسفل، ويكون فوق المنحدر حينما يكون مقعر لأعلى.

تعريف المقعر

الرمز البياني للدالة $f(x)$ المقعر (أو) $f(x)$ يكون

(أ) مقعرًا لأسفل في فترة مفتوحة إذا كانت أو متساوية في الفترة I إذا مقعرًا لأسفل في فترة مفتوحة إذا كانت أو متساوية في الفترة I .

إذا كانت دالة $f(x) = y$ لها منطقة تبدأ وتنتهي يمكن أن تتسبب أن تكون إما كانت $y > 0$ ، أو $y < 0$ ، أو تنحصر في $y = 0$.

المقعر المقعر

الرمز البياني للدالة $f(x)$ المقعر (أو) $f(x)$ يكون

(أ) مقعرًا لأسفل في أي فترة حيث $y > 0$.

إذا مقعرًا لأسفل في أي فترة حيث $y < 0$.

مثال (3.1) **مقطع المقعر**

السهمي $y = x^3$ (أو) $y = x^3$ مقعرًا لأسفل في الفترة $(-\infty, 0)$ لأن منطقة تبدأ وتنتهي $y = 2$ دائمًا موجبة.

مثال (3.2) **مقطع المقعر**

حيث المقعر $y = 3 + \sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$.

المقعر

الرمز البياني للدالة $f(x) = 3 + \sin x$ مقعرًا لأسفل على الفترة $(0, \pi)$ حيث $y = 3 + \sin x$ تكون موجبة، ويكون مقعرًا لأسفل على الفترة $(\pi, 2\pi)$ حيث $y = 3 + \sin x$ تكون موجبة (الشكل 3.22).

(2) حيث المقعر $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ على الفترة $(-\infty, \infty)$.

نقاط الانقلاب (المقعر)

السهمي $y = 3 + \sin x$ في مثال (3.2) يقترن هذه النقطة (أو) $(\pi, 3)$ السهمي $(\pi, 3)$ نقطة انقلاب السهمي.

تعريف نقطة الانقلاب (المقعر)

إذا كانت دالة $f(x)$ مقعرًا على فترة مفتوحة I وكانت السهمي $f(x)$ يقترن هذه النقطة على حالي، فإن النقطة $(a, f(a))$ تسمى نقطة انقلاب (المقعر) السهمي.

لا يمكن أن تكون الأولى $(x = 0)$ تساوي 0 عند $x = 1$ و $x = 117$.

الفترة	$0 < x < 1$	$1 < x < 117$	$x > 117$
الفترة	+	-	+
الفترة	موجبة	موجبة	موجبة
الفترة	موجبة	موجبة	موجبة

يتمركز السهمي إلى اليسار في الفترة الزمنية $(0, 1)$ والفترة الزمنية $(1, 117)$ ، ويتركز إلى اليسار في الفترة $(117, \infty)$.

المعادلة $a(t) = v'(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$

تكون 0 عند $t = \frac{7}{3}$.

الفترة	$0 < t < \frac{7}{3}$	$t > \frac{7}{3}$
الفترة	-	+
الفترة	موجبة	موجبة
الفترة	موجبة	موجبة

السهمي السهمي ناحية اليسار (المعادلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية $(0, \frac{7}{3})$ ، ويكون في خط تساوي صفري عند $t = \frac{7}{3}$ وأعلىها ناحية اليمين (المعادلة موجبة) بعد ذلك.

نلاحظ أن السهمي لها تغيرات في بعض الحالات الاقتصادية. إذا كانت $y = C(x)$ و $y = C(x)$ هي التكلفة الكلية لإنتاج x وحدة من نوع من السلع، فكل نقطة انقلاب عند x هي عدد من السلع التي عندما تكون التكلفة الكلية لإنتاج x وحدة (موجبة) تغير من التكلفة إلى التزايد أي أنها النقطة التي عندما تصل التكلفة الكلية إلى قيم صغرى.

6- الربط:

تعطى التكلفة الكلية لإنتاج ما بالدالة:

$$C(x) = 100x^2 + 1300x + 1000$$

حيث x تمثل ألف وحدة إنتاج و $C(x)$ تعطى بآلاف الدراهم. تباع كل وحدة إنتاج بـ 2000 درهم.

(أ) إذا كان x عدد الوحدات المباعة، فأوجد بدلالة x دالة

$$P(x) = R(x) - C(x) : \text{الربح}$$

$$P(x) = 2000x - 100x^2 - 1300x - 1000$$

$$P(x) = -100x^2 + 700x - 1000$$

(ب) أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح.

$$P'(x) = -200x + 700$$

$$P''(x) = -200 < 0$$

يتحقق أكبر ربح عند: $P'(x) = 0$ أي 3500 وحدة إنتاج.

7- أخطاء شائعة:

في مسائل الأوفقيّة، قد يتغاضى الطلاب عن نقاط النهاية كنقاط ممكنة لقيم أوفقية، أو يجدون حلولاً خارج مجال المتغير موضع الدراسة. عند الرسم البياني لمسائل أوفقية تتضمن دوال مثلثية، غالباً ما يتم التغاضى عن حلول بديلة لكل من:

$f'(x) = 0$ أو $f''(x) = 0$. الطبيعة الدورية للدوال المثلثية لا بد من أن تكون دوماً موضع الاعتبار في هذه المسائل، وذلك فيما عدا بعض الحالات التي تكون فيها الشروط الفيزيائية للمسألة مقيدة للمجال .

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين : 2-A ، 7-A ، 9-A ، 11-A .
تحقق من عمل الطلاب . تأكد من فهمهم لتطبيق الدوال على القيم
العظمى والصغرى لنماذج من الواقع .

الوحدة الثانية

التمرين 1

1. استخدام اعتبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية للدالة $y = x^3 - 8x^2 + 12x - 8$

2. استخدام اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية للدالة $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$

3. إيجاد جميع المرومات نصف القطر 5 cm و 3 cm في الدائرة 5 cm

4. إيجاد أبعاد أسطوانة دائرية قائمة حجمها 1000 cm^3 ومساحتها السطحية 600 cm^2

التمرين 2

5. $\sin(-\alpha)$

6. $\cos(\pi - \alpha)$

7. $\cos(\pi - \alpha)$

8. $\cos(\pi - \alpha)$

التمرين 3

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$

10. $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

11. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 4

12. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

13. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 5

14. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

15. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 6

16. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

17. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 7

18. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

19. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 8

20. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

21. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 9

22. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

23. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 10

24. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

25. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 11

26. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

27. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 12

28. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

29. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 13

30. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

31. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 14

32. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

33. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 15

34. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

35. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 16

36. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

37. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 17

38. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

39. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 18

40. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

41. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 19

42. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

43. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 20

44. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

45. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 21

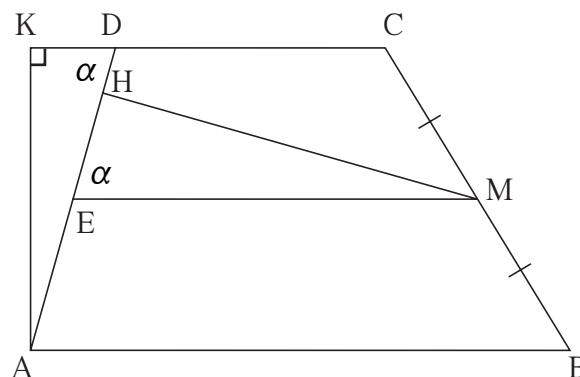
46. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

47. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^2}$

التمرين 22

48. $f(x) = \frac{2x^2 + 12x - 44}{(2x + 8.3)^$

[illegible]



أثبت أن مساحة شبه المنحرف ABCD تساوي: $AD \times MH$ وحلة مربعة.

$$\frac{(AB + CD) AK}{2} = : (ABCD) \text{ مساحة}$$

$$\text{ME} = \frac{\text{AB} + \text{CD}}{2}$$

إِذَا:

$$ME \times AK = (ABCD) \text{ مساحة}$$

$$\sin \alpha = \frac{AK}{AD} = \frac{MH}{ME} \text{ ولكن}$$

وبالتالى:

$$AD \times MH = \text{مساحة } ABCD$$

10- إجابات وحلول:

إجابات التمارين في سياق الدرس 3-4

(1) (أ) المستوى $x = 6$ (جهاز 600) يحقق قيمة عظمى للربح تساوي 16 000 درهم.

(ب) الربح يساوي صفراً إذا كان $b(x) = 0$.

نحصل على $x = 2$ (200 جهاز) أو $x = 10$

(1000 جهاز).

(2) التكلفة المتوسطة

$$\frac{C(x)}{x} = x + 1 + \frac{9}{x}$$

$$C_M(x) = x + 1 + \frac{9}{x}$$

$$C'_M(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$$

القيمة الصغرى للتكلفة المتوسطة تكون عند $x = 3$ أي عند الإنتاج 300 وحدة. وتكون قيمة التكلفة المتوسطة 700 درهم.

$\frac{dV}{dt} = 42\pi - \frac{2000}{r^2}$
 $0 = 42\pi - \frac{2000}{r^2}$ المثلث $\frac{dV}{dt} = 0$
 $42\pi = \frac{2000}{r^2}$ المثلث $\frac{dV}{dt} = 0$
 $r = \sqrt{\frac{2000}{42\pi}} \approx 3.42$ حل المسألة

أي ما يحدث عند $r = \sqrt{2000/42\pi}$ ؟
 إذا كان معدل تغير الحجم V مساوياً للصفر، فإن معدل التغير في المساحة A عند هذه النقطة
 هو $\frac{dA}{dt} = 42\pi - \frac{2000}{r^2}$ ، ولكن $\frac{dV}{dt} = 0$ عند هذه النقطة، لذلك $\frac{dA}{dt} = 0$ أيضاً.

عرف r ما يحدث عند $r = \sqrt{2000/42\pi}$ ؟
 المسألة الثانية

$\frac{dV}{dt} = 42\pi - \frac{2000}{r^2}$
 أي ما يحدث عند $r = \sqrt{2000/42\pi}$ ؟
 إذا كان معدل تغير الحجم V مساوياً للصفر، فإن معدل التغير في المساحة A عند هذه النقطة
 هو $\frac{dA}{dt} = 42\pi - \frac{2000}{r^2}$ ، ولكن $\frac{dV}{dt} = 0$ عند هذه النقطة، لذلك $\frac{dA}{dt} = 0$ أيضاً.

$A = \frac{1000}{r^2} = 2\sqrt{2000/42\pi} = 2\pi$

على الترتيب الواحد التي تستخدم الآن مادة هلامية لتعبئتها يكون ارتفاعها مساوياً لنصف
 قطر $r = 3.42$ cm ، $A = 10.84$ cm²

أمر الحياة على مساقاة الله العظيم والعمرى

Strategy for Solving Max-Min Problems

[illegible]

$A'(x) = 0$
 $8 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$
 $x = \pm \sqrt{2}$
 القيمة السالبة مرفوضة
 $x = \sqrt{2}$
 لتأخذ قيمة الدالة عند النقطتين $x = \sqrt{2}$ والنقطتين الطرفيتين $x = 0, x = 2$
 $A(0) = A(2) = 0$
 $A(\sqrt{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}} \times (4 - \frac{4}{\sqrt{2}}) \approx 6.12$
 ومن القيمة العظمى المسألة
تمرين
 المسطحة مساحة سطح عظمى حوالي 6.12 وحدة مربعة عند $x = 1.15$ وحدة. عند هذه النقطة
 يكون طول المستطيل 2.6 وحدة، وعرضه 2.3 وحدة.

الاستكشاف (3): إنشاء نموذج خوارزمية

الخطوة الأولى في إنشاء نموذج خوارزمية هي تحديد المتغيرات التي ستستخدم في النموذج. في هذا المثال، سنستخدم المتغيرات التالية:

- المتغير المستقل: OC (الوقت المستغرق في عملية التشغيل)
- المتغير التابع: MC (الوقت المستغرق في عملية المعالجة)

بعد تحديد المتغيرات، نحتاج إلى تحديد العلاقة بين المتغيرين. يمكننا استخدام العلاقة التالية:

$$MC = a \cdot OC + b$$

حيث a و b هما ثابتان. يمكننا استخدام البيانات التي تم جمعها في الجدول التالي لتقدير قيم a و b .



مفتی (12,000)
مفتی (12,000)

$$h = \sqrt{16 - x^2} \quad f(x) = \frac{92 - x}{16}$$

$$Y(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{3t}{2} - 1 \right) \sqrt{16 - \left(\frac{3t}{2} - 1 \right)^2}.$$

CD من أجل المجال الكبير الحجم V هو $\|L(x)\| \approx 168$

(3) اخرج لكافة القيمة (الشروط) $0 \leq x \leq 800$ هو شرط معلوم في هذه الحالة

إجابات التمارين التمهيدية للدرس 3-5

(1) $AB = \sqrt{74}$

$$(2) \ AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(3) \frac{1 - 2y}{2x + 2y - 1}$$

$$(4) \frac{-(y + \sin y)}{x + x \cos y}$$

(5) $2x \cos^2 y$

(6) $2x \cos(x^2 + 1)$

$$(7) \frac{1 - \cos x - (x + 1) \sin x}{(x + 1)^2}$$

(8) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0; x = \pm 2$

(9) $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$;

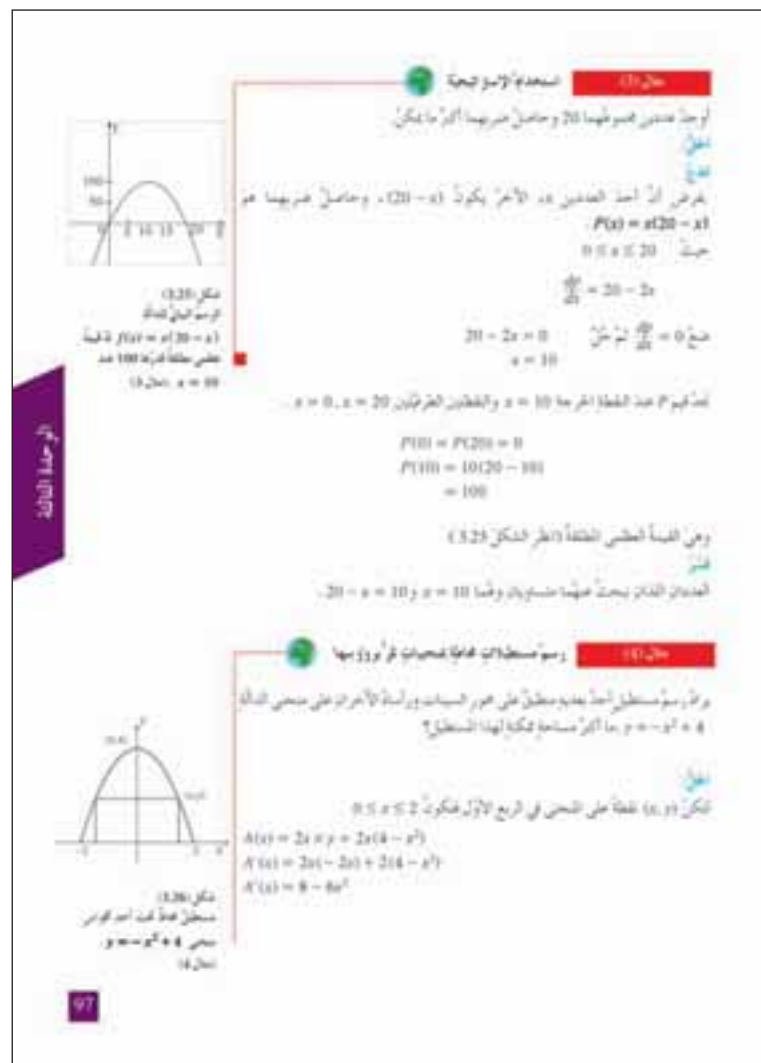
$$x = -1, x = 2, x = \frac{3}{2}$$

(10) $y = -6x + 5$

$$(11) \ y = -8x + 4$$

$$x = \frac{5}{6} \quad (12)$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ (ب)}$$



حل السؤال 1: الربح الأقصى (القيمة العظمى للربح)



نظر عن أن $p(x) = 15x - 6x^2$ و $r(x) = 9x$ حيث x تمثل آلاف وحدات المنتج
هل يوجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى للربح؟ إذا كان كذلك، ما هو؟

$$\text{لا بد أن } p'(x) = 9 \text{ و } r'(x) = 3x^2 - 12x + 15$$

$$\text{نضع } p'(x) = r'(x) \Rightarrow 3x^2 - 12x + 15 = 9$$

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

حل المعادلة التربيعية هذه:

$$x_1 = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = 2 \pm \sqrt{2} = 0.588$$

$$x_2 = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = 2 \pm \sqrt{2} = 3.414$$

$$P(x) = r(x) - p(x)$$

$$= 6x^2 - 12x + 15 - 9x$$

$$P(x) = -3.511$$

$$P(x_2) = 9.657$$

وبهذا نجد أن أكبر ربح يحدث عند $x = 3.414$ و $x = 0.588$ تحدث عند $x = 0.588$

مستوى الإنتاج النسبة للربح الأعظم تحدث عند إنتاج 3.414 ألف وحدة ونفسياً
تحدث عند إنتاج 0.588 ألف وحدة.

الرسم المبين في الشكل (3.29) يبين أن الربح الأقصى يحدث عند $x = 3.414$ تقريباً، وأن
التقريب الكروي تحدث عند $x = 0.588$ تقريباً.

1. نظر عن أن $h(x) = -x^2 + 12x - 20$ تمثل الربح بألاف الدرهم لبيع x

المنتجات من أجهزة كهربائية على الفترة $[0, 15]$

(أ) هل يوجد مستوى إنتاج يحقق قيمة عظمى للربح؟ إذا كان كذلك، فما هو؟

أيضاً ما مستوى الإنتاج الذي يكون الربح يساوي صفر؟

طريقة أخرى للبحث عن مستويات الإنتاج الأعلى هي البحث عن المستويات التي تجعل
الكلفة المتوسطة أقل ما يمكن بالنسبة إلى الوحدات المنتجة. طريقة (7) تعيداً في إيجاد
ذلك.

طريقة (7): تعيين إلى أصغر قيمة للكلفة

Minimizing Average Cost
نسبة الكلفة (أو وحدة) التي عند تكون الكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن هو
المستوى الذي عند تكون الكلفة المتوسطة تساوي الكلفة الحدية.

100

2. يمكن أن $C(x) = x^2 + 9x + 5$ الكلفة (تكاليف الإنتاج) و $Q(x)$ (الكمية المنتجة) من

سلعة ما. هل هناك مستوى إنتاج يحقق الكلفة المتوسطة الأقل قيمة؟ إذا كان كذلك،

فما هي؟

لا يوجد أصغر قيمة للكمية $x = 0$

* في التمرين 2، أ، توجد المنطقة بين القطرتين A و B.

1. A(0,3), B(7,0)

2. A(0,4), B(8,0)

* في التمرين 3، أ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ لـ $y = 3x^2 - 5x + 6$

3. $2xy + y^2 = x + y$

4. $x^2 = \tan y$

5. $y = \sin(x^2 + 1)$

* في التمرين 7، أ، أوجد حل المعادلة جبرياً.

6. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

7. $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$

* في التمرين 9، أ، يمكن أن $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ، أكتب معادلة التماس للمكانة f عند
 $x = c$.

8. $c = 0$

9. $c = -1$

10. أوجد أن يقطع خط التماس مع المنحنى $f(x) = x^2 - 6x + 5$ عند $x = 1$

(أ) في التمرين 10، أ، أوجد

(ب) في التمرين 10، أ، أوجد

102

3-5 المعدلات المرتبطة

1- الأهداف:

– يكون الطلاب قادرين على حل مسائل في المعدلات المرتبطة.

2- المفردات والمفاهيم الجديدة:

معادلات المعدلات المرتبطة، إستراتيجية الحل، محاكاة الحركة المرتبطة.

3- الأدوات الوسائل:

آلة حاسبة علمية، حاسوب.

4- التمهيد:

لنأخذ الدالة البارامترية f المعرفة كما يلي:

$$f: \begin{cases} x(t) = 3t - 2 \\ y(t) = t^2 + 1 \end{cases}$$

(أ) أوجد نقطة على منحنى هذه الدالة عند $t = 0$. $(-2, 1)$

(ب) أوجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t . $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}t$

(ج) أوجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة x . $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4}{9}$

(د) أوجد y بدلالة x ثم احسب $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{9} + 1; \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 4}{9}$$

الهدف

نقطة على $x(t)$ قابلة للتفاضل.

$$x(t) = 3t - 2 \text{ تكافئ إنتاج } x \text{ بمتغير } t > 0$$

$$x(t) = 3t - 2 \text{ تكافئ إنتاج } x \text{ بمتغير } t > 0$$

إذا كان يمكن التعبير عن $x(t)$ كدالة لـ t ، فما يمكن، سوف يكون $x(t)$ الذي

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{t} \right) = 0$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

$$x(t) = 3t - 2$$

5-التدريس:

توجد طريقة جيدة للبداية في هذا الدرس وهي مراجعة الموضوعات الخاصة بقاعدة السلسلة، كما تطبق على المنحنيات البارامترية وعلى الاشتقاق الضمني. تشكل هذه الموضوعات صعوبة بالنسبة إلى معظم الطلاب، ولكن التمكن من هذا الموضوع أمر أساسي للنجاح في حل مسائل المعدلات المرتبطة حيثما لا توجد علاقة مباشرة بين الكميتين.

تقدم إستراتيجية الخطوات لحل مسائل المعدلات المرتبطة في صفحة (103) إلى الطلاب عملية خطوة بخطوة يتبعونها لكي يصلوا إلى النتيجة المرغوبة. ينبغي أن يكون الطلاب على وعي للطرق المناسبة للدعم البياني (الرسم)، كما في استكشاف (1). ينهي استكشاف (1) الدرس ببيان كيف أن نظاماً بارامترياً يمكن أن يحاكي حركة جسم عندما يمكن التعبير عن تلك الحركة كدالة بالنسبة إلى الزمن.

ملاحظات على الأمثلة:

■ الأمثلة (2-4) مصممة لعرض إستراتيجية الخطوات الست في حل مسائل المعدلات المرتبطة.

6- الربط:

خزان ماء على شكل نصف كرة نصف قطرها $r = 13 \text{ m}$. يعطى حجم الماء في هذا الخزان بعمق y_m بالقاعدة: $V = \frac{\pi}{3}(3r - y)y^2$. إذا تدفق الماء من الخزان بمعدل $6 \text{ m}^3/\text{min}$ عندما كان ارتفاع الماء $y = 8 \text{ m}$ ، فما معدل تغير مستوى ارتفاع الماء في الخزان؟

لدينا: $\frac{dV}{dt} = -6 \text{ m}^3/\text{min}$ يجب إيجاد $\frac{dy}{dt}$.

$$\frac{dV}{dt} = (26\pi y - \pi y^2) \frac{dy}{dt}$$

وبالتالي فإن معدل تغير مستوى ارتفاع الماء هو:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{24\pi} \approx -1.326 \text{ cm/min}$$

7- أخطاء شائعة:

أكثر أخطاء الطلاب شيوعاً في حل مسائل المعدلات المرتبطة، هي التقييم أو التعويض المبكر (قبل الاشتقاق بالنسبة إلى الزمن) ما يجعل من المستحيل الحصول على المشتقات المناسبة. أكد على أن التقييم هو الخطوة النهائية في إستراتيجية الخطوات لحل مسائل المعدلات المرتبطة.

8- التقويم:

اطلب إلى الطلاب حل التمارين: 2-A، 4-A، 5-A، 8-A. تحقق من عمل الطلاب وتأكد من أنهم قد فهموا معنى المعدلات المرتبطة وتأثيرها على تطبيقات حياتية.

مثال (2): يتحرك جسم في اتجاه y مع سرعة $\frac{dy}{dt} = 0.14 \text{ m/s}$. في لحظة معينة، يكون الجسم على بعد 500 ft من نقطة انطلاقه. وفي اللحظة التي تكون فيها زاوية ارتفاع البالون من الجدار هي $\frac{\pi}{4}$ ، كم تكون سرعة ارتفاع البالون عند هذه اللحظة؟

الحل: نحل هذه المسألة في 4 خطوات:

الخطوة (1): نرسم صورة ونسم المتغيرات والمتبادلات (الشكل 3.32).

الخطوة (2): نكتب معادلة تربط المتغيرات θ و y .

الخطوة (3): نكتب معادلة تربط $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{d\theta}{dt}$.

الخطوة (4): نستخدم قاعدة السلسلة لحساب $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $y = 500$.

الحل: نكتب معادلة تربط θ و y : $y = 500 \tan \theta$

نشتق الطرفين مع الزمن: $\frac{dy}{dt} = 500 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$

عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\sec^2 \theta = 2$ ، $\frac{dy}{dt} = 0.14$

لذلك: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{0.14}{2} = 0.07 \text{ rad/s}$

مثال (3): يتحرك جسم في اتجاه y مع سرعة $\frac{dy}{dt} = 9.8 \text{ m/s}$. في لحظة معينة، يكون الجسم على بعد 10 ft من نقطة انطلاقه. وفي اللحظة التي تكون فيها زاوية ارتفاع البالون من الجدار هي $\frac{\pi}{4}$ ، كم تكون سرعة ارتفاع البالون عند هذه اللحظة؟

الحل: نحل هذه المسألة في 4 خطوات:

الخطوة (1): نرسم صورة ونسم المتغيرات والمتبادلات (الشكل 3.33).

الخطوة (2): نكتب معادلة تربط المتغيرات θ و y .

الخطوة (3): نكتب معادلة تربط $\frac{dy}{dt}$ و $\frac{d\theta}{dt}$.

الخطوة (4): نستخدم قاعدة السلسلة لحساب $\frac{d\theta}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $y = 10$.

الحل: نكتب معادلة تربط θ و y : $y = 10 \tan \theta$

نشتق الطرفين مع الزمن: $\frac{dy}{dt} = 10 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$

عند $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\sec^2 \theta = 2$ ، $\frac{dy}{dt} = 9.8$

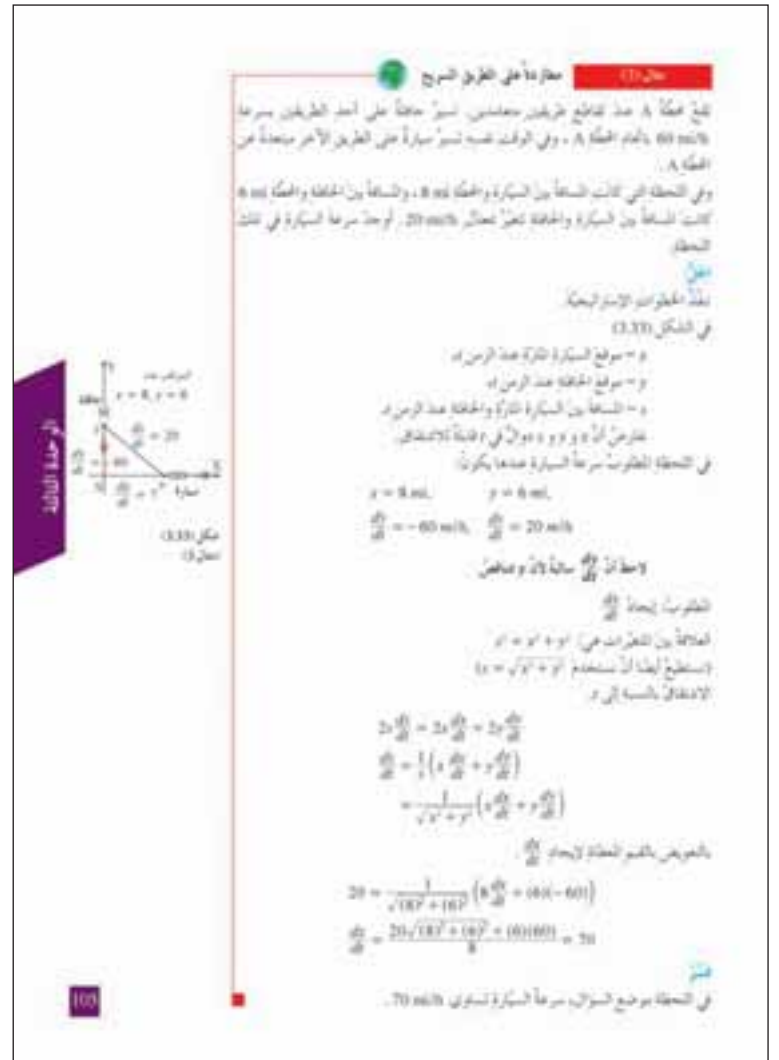
لذلك: $\frac{d\theta}{dt} = \frac{9.8}{2} = 4.9 \text{ rad/s}$

9- مسألة اليوم:

في أول يناير من عام 1997 ، كان عدد سكان تجمع في الريف 3000 شخص. على افتراض أن العدد يتناقص سنوياً 4% ؛
(أ) كم كان عدد السكان في أول يناير من عام 1999 ؟

2765

(ب) بعد كم سنة سيصبح عدد السكان أقل من 2000 شخص؟
بعد 10 سنوات من عام 1997 أي عام 2007



إجابات اختبار الوحدة الثالثة

(1) (أ) قيمة صغرى محلية: 2 - عند $x = -2$

قيمة عظمى محلية: 2 عند $x = 0$

(ب) $(-2, 0)$

(ج) $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$

(د) $(-\infty, -1)$

(هـ) $(-1, \infty)$

(2) (أ) $[-\infty, -3], [0, 3]$

(ب) $[-3, 0], [3, \infty]$

(ج) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(د) $(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$

(هـ) قيمة عظمى محلية 92 عند $x = \pm 3$

قيمة صغرى محلية 11 عند $x = 0$

(و) $(-\sqrt{3}, 56), (\sqrt{3}, 56)$

(3) (أ) لا يوجد

(ب) 4

(ج) عند $x = -2$ و $x = 2$

(4) $g(x) = 2x^3 - 47$

(5) (أ) حوالي $2.063 \text{ cm} \times 13.873 \text{ cm} \times 5.873 \text{ cm}$

(ب) حوالي 168.126 cm^3

(6) (أ) $a = -50$

(ب) $a = -24$

(7) (ب)

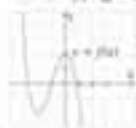
(8) يتناقص بمعدل 0.1123 قدم/دقيقة

(9) $\frac{145}{\sqrt{13}} \approx 40.215 \text{ m/s}$

اختبار الوحدة

1 استخدام الرسم البياني لـ $f(x)$ و $f'(x)$ لتقدير الإجابة الصحيحة من الأسئلة التالية.

(أ) ما هي القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية للقيمة المتوسطة لـ $f(x)$ على الفترة $[0, 3]$ ؟



(ب) ما هي القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية لـ $f'(x)$ على الفترة $[0, 3]$ ؟

(ج) ما هي القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية لـ $f''(x)$ على الفترة $[0, 3]$ ؟

(د) ما هي القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية لـ $f'''(x)$ على الفترة $[0, 3]$ ؟

2 استخدام الطرق التحليلية لإيجاد التقدير حيداً تكون عليها الدالة

$$y = -x^2 + 18x + 11$$

(أ) حيداً

(ب) حيداً

(ج) حيداً

(د) حيداً

ثم أوجد

(أ) حيداً

(ب) حيداً

3 مشتقة الدالة $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$ هي $f'(x) =$

(أ) حيداً

(ب) حيداً

(ج) حيداً

(د) حيداً

4 إذا كانت مشتقة الدالة $f(x) = 8x^2 + 4x - 1$ وكانت حيداً $f'(x)$ عند $x = 3$ ، فما هي حيداً $f(x)$ عند $x = 3$ ؟

5 تحطيط مصنع صندوق مستطيل من الورق. وكانت قطعة الورق مربعة أبعادها 18 cm و 18 cm. سوف تقطع مربعات متساوية ثم تطويها من الزوايا لتصبح أشكالاً

مربعة الشكل.

(أ) ما أبعاد الصندوق الذي يمكن صنعه؟

(ب) ما أبعاد الصندوق الذي يمكن صنعه؟

6 ليكن $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ ما هي حيداً $f'(x)$ عند $x = 2$ ؟

(أ) حيداً

(ب) حيداً

(ج) حيداً

(د) حيداً

الوحدة الثالثة: تطبيقات على المشتقات

المشتقات والتطبيقات

المشتقات

- القيمة العظمى المحلية

- القيمة الصغرى المحلية (النسبة)

- المشتقة المرحبة

- القيمة المتوسطة للمشتق

- المشتقة المتوسطة (معدل التغير)

- المشتق

- المشتق الثاني

- المشتق الثالث

- المشتق الرابع

مطابقاً ونظراً

تعريف القيمة العظمى المحلية

إذا كانت $f(x)$ دالة ماثلها $f(x)$ فإن $f(x)$ تكون

(أ) القيمة العظمى المحلية على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(x)$ لكل x في D .

(ب) القيمة العظمى المحلية على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(x)$ لكل x في D .

(ج) القيمة العظمى المحلية على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(x)$ لكل x في D .

(د) القيمة العظمى المحلية على D إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(x)$ لكل x في D .

نظرية القيمة العظمى

إذا كانت $f(x)$ دالة ماثلها على $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية على $[a, b]$.

تعريف القيمة العظمى المحلية

إذا كانت $f(x)$ دالة ماثلها على $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون

(أ) قيمة عظمى محلية على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(x)$ لكل x في $[a, b]$.

(ب) قيمة عظمى محلية على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(x)$ لكل x في $[a, b]$.

(ج) قيمة عظمى محلية على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) \geq f(x)$ لكل x في $[a, b]$.

(د) قيمة عظمى محلية على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت $f(x) \leq f(x)$ لكل x في $[a, b]$.

نظرية القيمة العظمى المحلية

إذا كانت $f(x)$ دالة ماثلها على $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية على $[a, b]$.

وكانت $f(x)$ دالة ماثلها على $[a, b]$ فإن $f(x)$ تكون

(أ) حيداً

(ب) حيداً

(ج) حيداً

(د) حيداً

١. نأخذ من أن السعر يتبع بالشروط التالية: من التكاليف هو: $p(x) = 30x$ والسعر الإجمالي لهذه التكاليف هو: $c(x) = 0.00012x^2 - 0.1x^3 + 20x + 60000$.
أو جيد مستوى الإنتاج الذي يعطي القيمة العظمى للربح. فتم الحصول على:
(أ) 28 وحدة
(ب) 347 وحدة
(ج) 386 وحدة
(د) 383 وحدة
(هـ) غير موجود

٢. حركة دارة على شكل مخروط قائم ذات نصف قطرها 3 ft وارتفاعها 12 ft. تكون المخروط يتحرك على ارتفاع 7 ft. يدخل الماء من المخروط إلى الخارج بمعدل 3 ft³ في الثانية. أوجد معدل تغير مستوى الماء في المخروط بين القطرات التي تلتها.

٣. اوجد سرعة متغير من عوامة في عمق المحيط بارتفاع 90° بعد أن تكونت في مسافة 185 m من العوامة. ويحرك معدل سرعة يساوي 25 cm/s. أوجد السرعة التي فيها مسافة 110 m من العوامة ويحرك معدل سرعة يساوي 35 cm/s. بالتالي، أوجد معدل تغير المسافة بين التربين.

طريقة (3): طريقة القيمة المتوسطة المشتقة

إذا كانت $f(x) = x$ مشتقة عدد كل نقطة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وكانت قيمة المشتقة عند كل نقطة تنتمي لـ (a, b) ، فإن $f(x)$ لها مشتقة واحدة على $[a, b]$ في (a, b) يكون صفرًا.

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تعريف: الدالة المتزايدة والدالة المتناقص

Increasing Function, Decreasing Function

تكون $f(x)$ دالة متزايدة على الفترة $[a, b]$ إذا كان لكل x_1, x_2 في الفترة $[a, b]$:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ إذا كان } x_1 < x_2, \text{ و } f(x_1) > f(x_2) \text{ إذا كان } x_1 < x_2, \text{ و } f(x_1) = f(x_2) \text{ إذا كان } x_1 < x_2.$$

صيغة (1): التفاضل المتزايد والتناقص

تكون $f(x)$ دالة متزايدة على الفترة $[a, b]$ إذا كانت المشتقة على $[a, b]$:

$$(1) \text{ إذا كانت } f'(x) > 0 \text{ عند كل نقطة في } [a, b], \text{ فإن } f(x) \text{ متزايدة على } [a, b].$$

$$(2) \text{ إذا كانت } f'(x) < 0 \text{ عند كل نقطة في } [a, b], \text{ فإن } f(x) \text{ متناقص على } [a, b].$$

صيغة (2): التفاضل المتساوي

إذا كان $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I ، فإن $f(x)$ لها مشتقة واحدة C بحيث $f(x) = C$ في I .

صيغة (3): التفاضل المتساوي

إذا كان $f'(x) = g(x) = 0$ عند أي نقطة في فترة I ، فإن $f(x) = g(x) = C$ بحيث $f(x) = C$ في I .

تعريف: المتكافؤ للمشتقة

إذا كان $f(x)$ متكافؤ للمشتقة $f'(x)$ إذا كان $f'(x) = f(x)$ لكل x في مجال $f(x)$ حيث $f(x)$ متساوية لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

طريقة (4): أمثلة للتفاضل المتساوي

يطلب الاختبار الآتي على دالة متساوية $f(x)$:

- إذا كانت المشتقة $f'(x)$ تتغير بتناقص من موجب إلى السالب عند $x = a$ ، عندما $x < a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.
- إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من السالب إلى الموجب عند $x = a$ ، و $x < a$ ، عندما $x < a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.
- إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ عند $x = a$ ، يكون لها إشارة عند $x = a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.

تعريف: التفاضل

إذا كان $f(x) < f(y)$ و $x < y$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$.

تعريف: التفاضل

إذا كانت $f(x) < f(y)$ و $x < y$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$.

تعريف: التفاضل

إذا كان $f(x) < f(y)$ و $x < y$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$.

تعريف: التفاضل

إذا كان $f(x) < f(y)$ و $x < y$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$.

تعريف: التفاضل

إذا كان $f(x) < f(y)$ و $x < y$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$.

طريقة (3): أمثلة للتفاضل المتساوي

إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I ، فإن $f(x)$ لها مشتقة واحدة C بحيث $f(x) = C$ في I .

إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كل نقطة في فترة I ، فإن $f(x)$ لها مشتقة واحدة C بحيث $f(x) = C$ في I .

طريقة (4): أمثلة للتفاضل المتساوي

يطلب الاختبار الآتي على دالة متساوية $f(x)$:

- إذا كانت المشتقة $f'(x)$ تتغير بتناقص من موجب إلى السالب عند $x = a$ ، عندما $x < a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.
- إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ من السالب إلى الموجب عند $x = a$ ، و $x < a$ ، عندما $x < a$ ، و $x > a$ ، عندما $x > a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.
- إذا تغيرت إشارة $f'(x)$ عند $x = a$ ، يكون لها إشارة عند $x = a$ ، فإن $f(x)$ يكون لها قيمة عظمى عند $x = a$.