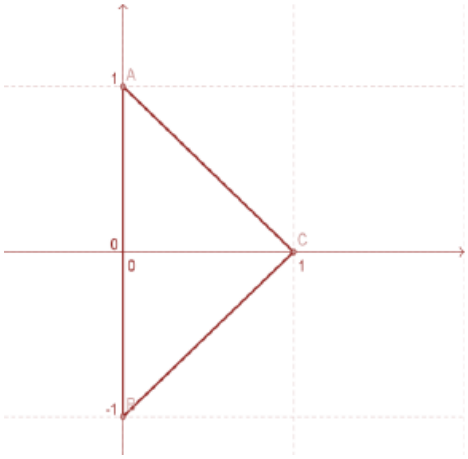
السؤال الأول

أوجد حجم المجسم بالطريقة التحليلية إذا علمت أن المجسم يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x = 1$ و $x = 0$



والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني بين هذين المستويين

1) هي أنصاف دوائر أقطارها في المستوى xy
2) هي مربعات قواعدها في المستوى xy

أما قاعدة المجسم فهي المثلث الذي رؤوسه

$A(0\,,1)$ و $C(1\,,0)$ و $B(0\,,-1)$

الفترة $[0\,,1]$

$m_{AC} = \frac{1}{-1} = -1$ $\quad b_{AC} = 1$ $\quad AC$ معادلة $y = -x + 1$

$m_{BC} = \frac{1}{-1} = +1$ $\quad b_{BC} = -1$ $\quad BC$ معادلة $y = x - 1$

1

$2r = -x + 1 - (x - 1) = -2x + 2$

$r = -x + 1$

$A(x) = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2}(-x + 1)^2 = \frac{\pi}{2}(x - 1)^2$

$V = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{\pi}{2}.\frac{[(x-1)^3]_0^1}{3} = \frac{\pi}{6}$

2

طول الضلع $= -2x + 2$

$A(x) = 4(-x + 1)^2$

$V = 4\int_0^1 (-x + 1)^2 dx = \frac{4}{3}$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

السؤال الثاني

أولا :أوجد طول منحنى بيان الدالة $y = \frac{x^6+8}{16x^2}$ من $x = 2$ الى $x = 3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5(16x^2) - 32x(x^6+8)}{(16^2)x^4} = \frac{16x[6x^6 - 2x^6 - 16]}{(16^2)x^4} = \frac{6x^6 - 2x^6 - 16}{16x^3}$$

$$= \frac{4x^6 - 16}{16x^3} = \frac{x^6 - 4}{4x^3}$$

$$l = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_2^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^6-4}{4x^3}\right)^2}\, dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{((4x^3)^2 + (x^6-4)^2}}{\sqrt{(4x^3)^2}}\, dx$$

$$= \int_2^3 \frac{\sqrt{(16x^6 + x^{12} - 8x^6 + 16)}}{4x^3}\, dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{x^{12} + 8x^6 + 16}}{4x^3}\, dx$$

$$= \int_2^3 \frac{\sqrt{(x^6+4)^2}}{4x^3}\, dx = \int_2^3 \frac{x^6+4}{4x^3}\, dx = \int_2^3 \left(\frac{x^6}{4x^3} + \frac{4}{4x^3}\right) dx = \int_2^3 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2x^2}\right]_2^3 \approx 4.13$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ثانيا : أوجد طول منحنى بيان الدالة

$$y = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{x} \sqrt{(sect)^4 - 1}\, dt$$

من $x = \frac{-\pi}{4}$ الى $x = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\sec^4 x - 1}$$

$$\boldsymbol{l} = \int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} \sqrt{1 + \left(\sqrt{\sec^4 x - 1}\right)^2}\, dx = \int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} \sqrt{1 + \sec^4 x - 1}\, dx$$

$$= \int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} \sqrt{\sec^4 x}\, dx = \int_{-0.25\pi}^{0.25\pi} sec^2 x\, dx = \tan(0.25\pi) - (\tan(-0.25\pi))$$

$$= 2tan(0.25\pi) = 2$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

السؤال الثالث :

أولا : أكتب الكسر على شكل مجموع كسور جزئية

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = A + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 1 & x^2 - 1 \\ \hline x^2 - 1 & 1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = 1 \quad \gg \quad A = 1$$

$$x = -1 \quad \gg \quad B = -1$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ثانيا :أوجد طول منحنى الدالة $f(x) = ln|x^2 - 1|$ من $x = 3$ الى $x = 5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$l = \int_3^5 \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{x^2 - 1}\right)^2}\, dx = \int_3^5 \sqrt{\frac{(x^2 - 1)^2 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx = \int_3^5 \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}}\, dx = \int_3^5 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\, dx$$

$$= \int_3^5 \left(1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1}\right) dx = [x + ln|x - 1| - ln|x + 1|\,]_3^5 \approx 2.288$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com