السؤال الأول أسئلة الأسبوع الثامن

أولا : أثبت أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)\,dx = 0$$

حيث n صحيح موجب

الحل

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2nx)\,dx = \frac{1}{2n}\left[\sin(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2n}\left[\sin(2n\pi) - \sin(-2n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{2n}\left[0 - 0\right] = 0$$

ثانيا : أثبت أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2\,dx = \pi$$

الحل

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\pi + 0\right] = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\pi - 0\right] = \pi$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ثالثا: أثبت أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

حيث كل من m ، n عدد صحيح موجب $m \neq n$

الحل

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)x) + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)x)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin((m+n)x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m-n}\sin((m-n)x)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\left(\sin((m+n)\pi) - \sin((m+n)(-\pi)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{m-n}\left(\sin((m-n)\pi) - \sin((m-n)(-\pi)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0] = 0$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

أثبت أن

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$$

حيث أن m, n صحيح موجب و $m \neq n$

الحل

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right]$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\right)dx\right]$$

مثل المسألة السابقة

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0$$

لاعلن الاستغناء عن $m \neq n$

اذا كانت $m = n$

من ثانيا $\therefore$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2\,dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2\,dx = \pi$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

السؤال الثاني

أولا : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيمات

$y = 3x + 1$

$y = 2x + 1$ $\quad x = 4$

y .

الحل

$$A = \int_0^4 (3x+1-2x-1)\,dx$$

$$= \int_0^4 (x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8 - 0 = 8$$

التحقق بطريقة أخرى

مساحة شبه المنحرف $oABL$

$$A_1 = \frac{1}{2}(4)(1+13) = 28$$

مساحة شبه المنحرف $oACL$

$$A_2 = \frac{1}{2}(4)[1+9] = 20$$

∴ المساحة المحصورة

$$A = A_1 - A_2 = 28 - 20 = 8$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

ثانيا

معادلة المستقيم AB

ميل المستقيم AB هو $\frac{5-0}{4-2} = \frac{5}{2}$

$\therefore$ معادلة $\overleftarrow{AB}$ هو

$y - 5 = \frac{5}{2}(x-4)$

$y - 5 = 2.5x - 10$

$y = 2.5x - 5$

بالمثل معادلة المستقيم BC

$y - 5 = -(x-4)$

$y = -x + 9$

معادلة المستقيم AC

$y - 3 = \frac{3}{4}(x-6)$

$y = \frac{3}{4}x - 1.5$

$$A = \int_2^4 (2.5x - 5 - \frac{3}{4}x + 1.5)dx + \int_4^6 (-x+9 - \frac{3}{4}x + 1.5)dx$$

$$A = \int_2^4 (1.75x - 3.5)dx + \int_4^6 (-1.75x + 10.5)dx$$

$$A = \left[\frac{1.75x^2}{2} - 3.5x\right]_2^4 + \left[\frac{-1.75x^2}{2} + 10.5x\right]_4^6$$

$= 3.5 + 3.5 = 7$

الطريقة

مساحة الشكل LBCM

$A_1 = \frac{1}{2}(2)[3+5] = 8$

مساحة المثلث ABL

$A_2 = \frac{1}{2}(2)(5) = 5$

مساحة المثلث ACM

$A_3 = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$

مساحة المنطقة المحصورة

$A = A_1 + A_2 - A_3 = 8 + 5 - 6$

$= 7$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

السؤال الثالث

* المنطقة المظللة عبارة عن قطعة دائرية
زاويتها المركزية 90°

مساحة القطعة الدائرية

$$A = \frac{1}{2} r^2 [R - \sin R]$$

$$A = \frac{1}{2}(2)^2 \left[\frac{\pi}{2} - \sin 90^\circ\right]$$

$$= 2\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \pi - 2$$

* طريقة أخرى

مساحة ربع الدائرة

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi$$

مساحة المثلث OBA

$$A_2 = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$$

مساحة المنطقة المظللة

$$A = A_1 - A_2 = \pi - 2$$

* طريقة أخرى باستخدام التكامل

معادلة المستقيم AB

$$y - 2 = -(x - 0)$$

$$y = -x + 2$$

$$A = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \int_0^2 (-x + 2)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\pi(2)^2 - \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2$$

$$= \pi - 2$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com