السؤال الأول:

أولا :عند مراقبة درجات الحرارة بعد منتصف الليل في إحدى المدن تبين أنه يمكن نمذجتها بالقانون

$$T(x) = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2$$

حيث x هو الوقت بعد منتصف الليل و $T(x)$ ïнЎF ўо ЎЏнК

1- ما متوسط درجات الحرارة بين *2.00* **ЎЎѳ** 2.00 **بعد الظهر ؟**

الحل : $$av(t) = \frac{1}{14-2}\int_2^{14}\left[2 - \frac{1}{7}(x-13)^2\right]dx$$

$$= \frac{1}{12}\left[2x - \frac{1}{7}\times\frac{(x-13)^3}{3}\right]_2^{14}$$

$$= \frac{1}{12}\left[28 - \frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\right]_2^{14} - \frac{1}{12}\left[4 - \frac{1}{7}\times\frac{-1331}{3}\right]_2^{14} \cong -3.286$$

2- في أي وقت تحدث هذه الحرارة

$$-3.286 = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2$$

$$(x-13)^2 = 37$$

$$x \approx 6.92 \quad \text{أو} \quad x \approx 19.02$$

القيمة المقبولة على الفترة $[2, 14]$ هي $x \approx 6.92$ أي أن درجة الحرارة -3.286 سوف تحدث عند الساعة 6:55 **صباحا**

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

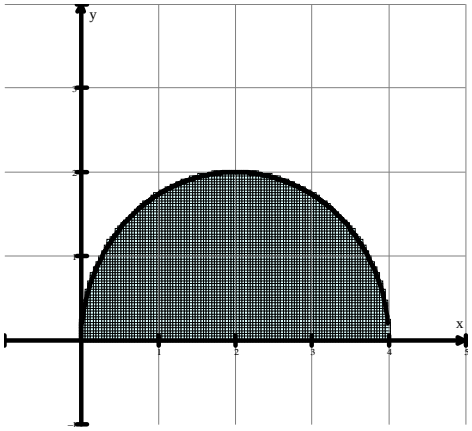
ثانيا :استخدم مساحة نصف الدائرة في المنطقة المظللة لتجد التكامل dx حيث المحدد $\int_0^4 f(x)$

$$f\ (x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$$

الحل

$\sqrt{-x^2 + 4x}$

$y^2 =$ $-x^2 + 4x$



$$y^2 + x^2 - 4x = 0$$

$$y^2 + x^2 - 4x + 4 = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

لدينا نصف داثرة مركزها $(2\ ,0)$ ونصف قطرها يساوي $R = 2$

إذآ مساحتها $A = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{4}{2}\pi =$ وحدة مربعة 2π

ومنه $\int_0^4 f(x)\,dx = 2\pi$

ثالثا أوجد بفرض أن $\boldsymbol{f(x) = \int_1^x lntdt}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} lnt\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_x^1 lntdt + \int_1^{x+h} lnt\,dt\right)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} lnt\,dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_1^{x+h} lntdt - \int_1^x lnt\,dt\right)$$

وهذا هو تعريف مشتقة الدالة lnt أي أن

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} lnt\,dt = \left(\int_1^x lntdt\right)' = lnx$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

السؤال الثاني

أولا : إذا كانت f و g دالتان معرفتان كما يلي

$$g(x) + g(a-x) = 4 \quad \text{و} \quad f(x) = f(a-x)$$

أثبت أن $$\int_0^a f(x) \times g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

الحل : نفرض أن $u = a - x \;, du = -dx$ نعوض في العلاقة المطلوبة

$$I = -\int_a^0 f(a-u)g(a-u)\,du = \int_0^a f(a-u)g(a-u)\,du$$

$$I = \int_0^a f(a-x)g(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)g(a-x)\,dx \;\ldots\ldots(1)$$

وذلك لأن $f(x) = f(a-x)$ بجمع العلاقة (1) الى $\int_0^a f(x) \times g(x)\,dx$

$$2I = \int_0^a f(x) \times g(x)\,dx + \int_0^a f(x)g(a-x)\,dx$$

$$2I = \int_0^a f(x)[g(a-x) + g(x)]\,dx$$

$$2I = \int_0^a f(x) \times 4\,dx$$

$$I = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ثانيا : أوجـد

$$\int \frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\,dx$$

مساعدة رياضية : اضرب البسط والمقام في $\sin(a-b) = \sin(a-x+x-b)$

الحل

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(a+x-x-b)}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\cos(x+a)\cos(x+b)}\,dx$$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$= \frac{1}{sin(a-b)} \int \frac{sin(x+a)cos(x+b)-cos(x+a)sin(x+b)}{cos(x+a)cos(x+b)}\, dx$$

$$= \frac{1}{sin(a-b)} \left[\int \frac{sin(x+a)cos(x+b)}{cos(x+a)cos(x+b)} dx - \int \frac{cos(x+a)sin(x+b)}{cos(x+a)cos(x+b)} dx \right]$$

$$= \frac{1}{sin(a-b)} \left[\int \frac{sin(x+a)}{cos(x+a)} dx - \int \frac{sin(x+b)}{cos(x+b)} dx \right]$$

$$= \frac{1}{sin(a-b)} [-ln|cos(x+a)| + ln|cos(x+b)|$$

$$= \frac{1}{sin(a-b)} ln \left| \frac{cos(x+b)}{cos(x+a)} \right|$$

السؤال الثالث : :

أولا : من نقطة ما تقع على منحنى الدالة $y = e^x$ رسم مماس لهذا المنحنى فصنع مثلثا متطابق الضلعين مع محوري الإحداثيات أوجد إحداثيي نقطة التماس المذكورة

الحل : ميل المماس بساوي $y = e^x \rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$

ولكن المماس يصنع مثلثا متطابق الضلعين مع محوري الإحداثيات أي أن ميله يساوي واحد

$$e^x = 1 \rightarrow\rightarrow\rightarrow ln e^x = ln 1$$

$$x = 0 \rightarrow\rightarrow\rightarrow y = e^0 = 1$$

أي أن نقطة التماس هي (0 , 1)

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

ثانيا : إذا كان $F_{(X)} = \int_0^x f_{(t)}\, dx$

أثبت أنه إذا كانت $f_{(t)}$ فردية فإن $F_{(X)}$ زوجية

و أثبت أنه إذا كانت $f_{(t)}$ فردية فإن $F_{(X)}$ زوجية

الحل $F_{(x)} = -\int_0^x -f_{(t)}\ dt$

بما أن $f_{(t)}$ فردي يمكن أن نكتب

$$F_{(x)} = -\int_0^x f_{(-t)}\ dt$$

$u = -t$

t	0	x
u	0	$-x$

$$F_{(x)} = -\int_0^{-x} f\,(u)(-du) = \int_0^{-x} f_{(u)}\, du = F_{(-x)}$$

$$F_{(x)} = F_{(-x)}$$

أي أن $F_{(x)}$ زوجي

ثالثا : لتكن الدالتان $f_{(x)}$ $g_{(x)}$ معرفتان كما يلي

$$f(x) = \int_0^{3x} \sqrt{4 + t^2}\, dt \quad , \quad g(x) = f(sinx)$$

أوجد 1) $g^l(x)$, $f^l(x)$

2) معادلة المستقيم المماس للدالة $g(x)$ عندما $x = \pi$

3) عند أي من نقاط الفترة $0 \leq x \leq \pi$ تبلغ الدالة $g(x)$ قيمتها العظمى؟

فسر اجابتك

الحل : 1)

$$g^l(x) = f^l(sinx)cosx = 3cosx\sqrt{4 + 9(sinx)^2} \quad , \quad f^l(x) = \sqrt{4 + 9x^2} \times 3$$

2) نجد أحداثيات نقطة التماس

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com

$$g(\pi) = f(sin\pi) = f(0) = \int_0^0 \sqrt{4 + t^2}\, dt = 0$$

إذن إحداثيات نقطة التماس هي $(\pi, 0)$

ميل المماس عند النقطة $g^l(\pi) = 3cos\pi \sqrt{4 + 9(sin\pi)^2} = -6$

معادلة المماس هي $y = -6(x - \pi)$

3) كما نلاحظ أن $g^l(x) = 3cosx \sqrt{4 + 9(sinx)^2}$ يعني أن مشتقة الدالة $g(x)$

موجبة في الربع الأول (الفترة) $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$ وسالبة في الفترة $\left[\frac{\pi}{2} , o\right]$

أي أن الدالة تبلغ قيمة عظمى عند النقطة $\frac{\pi}{2}$

PDF created with pdfFactory Pro trial version www.pdffactory.com