الأسبوع الثاني

السؤال الأول :

1- تحقق من صحة ما يلي

$$1-\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+c$$

الحل :نشتق الطرف الثاني

$$\left(ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)' = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{\frac{2x+2\sqrt{x^2+a^2}}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$2-\ \int \frac{dx}{c(a-x)(b-x)} = \frac{1}{c(a-b)} ln\left(\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right)$$

الحل :نشتق الطرف الثاني

$$\left(\frac{1}{c(a-b)} ln\left(\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right)\right)' = \frac{1}{c(a-b)} \times \frac{\frac{-ba(b-x)+ab(a-x)}{a^2(b-x)^2}}{\left(\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right)} = \frac{1}{c(a-x)(b-x)}$$

$$= \frac{1}{c(a-b)} \times \frac{-ba(b-x-a+x)}{\left(\frac{b(a-x)}{a(b-x)}\right)a^2(b-x)^2} = \frac{1}{c(a-b)} \times \frac{ab(a-b)}{ab(a-x)(b-x)}$$

السؤال الثاني :

1- ناقش بأكثر من طريقة (ثلاث طرق على الأقل) لإيجاد ناتج

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{(\sin x)^2+(\cos x)^2}{\sin x \cos x} dx$$

$$\int \frac{(sinx)^2}{\sin x \cos x} dx + \int \frac{(cosx)^2}{\sin x \cos x} dx$$

$$\int tanx\, dx + \int cotx\, dx = -ln|cosx| + ln|sinx| + c = ln|tanx| + c$$

الطريقة الثانية بقسمة البسط والمقام على $(\cos x)^2$

$$\int \frac{\frac{1}{(\cos x)^2}}{\frac{\sin x \cos x}{(\cos x)^2}} dx = \int \frac{(secx)^2}{tanx} dx = ln|tanx| + c$$

الطريقة الثالثة بقسمة البسط والمقام على $(\sin x)^2$

الطريقة الرابعة $$\int \frac{2}{2sinxcosx} dx = \int \frac{2}{sin2x} dx = 2\int \frac{2csc2x(csc2x+cot2x)}{(csc2x+cot2x)} dx$$

$$= -2\, ln|(csc2x + cot2x)| + c$$

الطريقة الخامسة : $$\int cscxsecx\, dx = \int \frac{(secx)^2 csecx}{secx} dx = \int \frac{((\tan x)^2+1)csex}{secx} dx$$

$$\int \frac{(\tan x)^2 cscx}{secx} dx + \int \frac{cscx}{secx} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

الطريقة السادسة $$\int cscxsecx\, dx = \int \frac{(cscx)^2 secx}{cscx} dx$$:

2- ناقش بأكثر من طريقة (طريقتان على الأقل) لإيجاد ناتج الطريقة الأولى

$$\int \frac{1-cosx}{1+cosx} dx = \int \frac{2\left(sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(cos\frac{x}{2}\right)^2} dx = 2\int \left(tan\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$\int 2((\sec 2x)^2 - 1)\, dx = tan2x - 2x + c$$

الطريقة الثانية : الضرب بالمرافق

$$\int \frac{1-cosx}{1+cosx} dx = \int \left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right)\left(\frac{1-cosx}{1-cosx}\right) dx$$

$$= \int \frac{(1-cosx)^2}{(sinx)^2} dx = \int \frac{1-2cosx+(cosx)^2}{(sinx)^2} dx$$

$$= \int ((secx)^2 - 2secxtanx + (tanx)^2)\, dx$$

$$= \int (2(secx)^2 - 2secxtanx)\, dx$$

$$= 2tanx - 2secx + c$$

السؤال الثالث :

أوجد ناتج

$$1-)\ \int \frac{cosx}{1+cosx}\,dx = \int \frac{cosx(1-cosx)}{(sinx)^2}\,dx = \int (cscx\ cotx_(cotx)^2)\,dx$$

$$= \int cscx\ cotx\,dx - \int ((cscx)^2 - 1)\,dx$$

$$= -cscx + cotx + x + c$$

$$2-)\ \int \frac{cos2x-cos2a}{cosx-cosa}\,dx$$

$$\int \frac{cos2x-cos2a}{cosx-cosa}\,dx = \int \frac{-2sin\frac{2x+2a}{2}sin\frac{2x-2a}{2}}{-2sin\frac{x+a}{2}sin\frac{x-a}{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{-2sin(x+a)sin(x-a)}{-2sin\frac{x+a}{2}sin\frac{x-a}{2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{-4sin\left(\frac{x+a}{2}\right)cos\left(\frac{x+a}{2}\right)sin\left(\frac{x-a}{2}\right)cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}{sin\frac{x+a}{2}sin\frac{x-a}{2}}\,dx$$

$$= \int 4cos\left(\frac{x+a}{2}\right)cos\left(\frac{x-a}{2}\right)dx$$

$$= 2\int \left(cos\left(\frac{x+a}{2}+\frac{x-a}{2}\right) + cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)\right)dx$$

$$= 2\int (cosx + cosa)\,dx$$

$$= 2(sinx + xcosa) + c$$