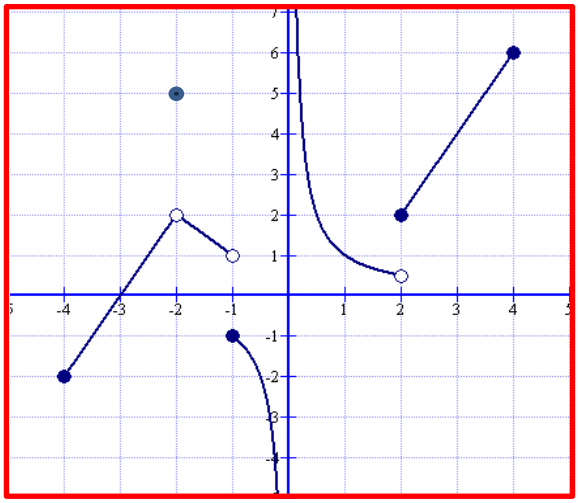
إختبار للمراجعة على الوحدة الأولى

س [1] الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[-4,4]$



من الرسم أجب على الأسئلة التالية :

1) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

2) $\lim_{x\to -3^-} \sqrt{f(x)}$

3) عند أى نقاط تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة ؟
وما قيمة هذه النهاية ؟

4) ابحث فى كيفية ايجاد $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-4}{x-3}$ مفسراً كل خطوة

5) أوجد متوسط تغير الدالة $f(x)$ من $x=-4$ إلى $x=-3$

6) أوجد نقاط انفصال الدالة $f(x)$ ثم حدد نوع الإنفصال .

7) ما القيمة التى يمكن أن نعطيها للدالة $f(x)$ عند $x=-2$ لتصبح متصلة عند هذه النقطة

8) أوجد معدل تغير الدالة $f(x)$ عند $x=-1.5$ لماذا ؟

الاجابة

إجابة السؤال الأول

1) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$

2) $\lim_{x\to -3^-} \sqrt{f(x)}$ (غير موجودة : لأن $f(x)<0$ على يسار -3)

3) تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x=4$
وقيمتها $=6$ أى
$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 6$

4) عندما $x \to 3$ فإن $f(x)$ تمثل بيانيا المستقيم المار بنقاط عديدة $(3,4)$ وميله يساوي 2 ومعادلته ص $y-4=2(x-3)$ أي $(y=2x-2)$

$$\therefore \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-4}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(2x-2)-4}{x-3} = 2$$

5) معدل التغير $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-3)-f(-4)}{-3-(-4)} = \frac{0-(-2)}{1} = 2$

6) $f(x)$ متصلة عند $x=-2$ نوع الإتصال نتيجة فجوة

$f(x)$ " " $x=-1$ " " نتيجة قفزة

$f(x)$ " " $x=0$ " " لا نهائي

$f(x)$ " " $x=2$ " " نتيجة قفزة

7) بوضع $f(-2)=2$ يصبح $f(x)$ متصلة عند $x=-2$

8) معدل تغير f عند $x=1.5$: بالتماس $= \frac{-1}{+1} = -1$

س 3 أوجد النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-[x]x-2}{x-2}$

2) $\lim_{x\to 2.5} \frac{|x-3|}{[x-3]}$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

4) باستخدام نظرية الإحاطة أوجد : $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$

الاجابة

1) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-[x]x-2}{x-2}$

عندما $x\to 2^-$ أى $x<2$

فان $[x]=1$ وتجرى النظرية

$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = 3$

2) $\lim_{x\to 2.5} \frac{|x-3|}{[x-3]} = \lim_{x\to 2.5} \frac{|2.5-3|}{[2.5]-3} = \frac{|-0.5|}{2-3} = \frac{0.5}{-1} = -0.5$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

ويمكن اكل عن طريق الضرب x الطرفين

4) $\therefore -1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$

بالضرب x^2

$\therefore -x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$

$\therefore \lim_{x\to 0} -x^2 \le \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x^2$

$\therefore 0 \le \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} \le 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x} = 0$

س 4

1) إذا كانت : $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-a}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$ فما قيمة a ؟ وضح خطوات الحل

2) إذا كانت :

$$f(x) = \begin{cases} x^2.\csc x.\cot x & , \quad x \neq 0 \\ a^2 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

أوجد قيمة a التى تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

الإجابة

1) $\therefore \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-a} - 2}{x-5} = \frac{1}{4}$

∴ النظرية معجودة

∴ نظرية البسط = صفر عندما $x \to 5$ ∴ نظرية المقام = صفر أيضاً

$\therefore \lim_{x \to 5} \sqrt{x-a} - 2 = 0$

$\therefore \sqrt{5-a} - 2 = 0$

$\therefore 5 - a = 4$

$\therefore a = 1$

ملاحظة يمكننا وضع $a=1$ ثم نوجد النظرية للتأكد من صحة الحل ستجد أن النظرية $= \frac{1}{4}$

2) $\therefore \lim_{x \to 0} x^2 \csc x \cdot \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin x \cdot \tan x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1 \times 1 = 1$

∴ بوضع $x=0$ تعبر الدالة متصلة عند $f(0) = 1$

وكذلك $f(0) = a^2$

$\therefore a^2 = 1$

$\therefore a = \pm 1$

س 5

1) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون موقعه عند أى لحظة $t \geq 0$ يعطى بالعلاقة $s(t) = t^2 - 3t + 11$

حيث t بالثانية و s بالمتر أوجد:

1) السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[2, 4]$

2) السرعة اللحظية عند $t = 3$

3) بعد كم ثانية تكون مسافة انتقال الجسيم تساوى 10m

---

2) إذا كان متوسط تغير الدالة $f(x)$ بالنسبة الى x على الفترة $[3, b]$ يساوى 6

وكانت :

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

فما قيمة b

الإجابة

$\because S(t) = t^2 - 3t + 11$

1) السرعة المتوسطة $= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{S(4) - S(2)}{4 - 2} = \frac{15}{2} = 7.5$ m/s

2) السرعة اللحظية = معدل التغير $= \lim_{h \to 0} \frac{S(3+h) - S(3)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3(3+h) + 11 - 11}{h} = 3$ m/s

3) حيث أن الجسم بدأ حركته عند $t = 0$
تفرض أنه ينتقل مسافة 10 m عند t ثانية

∴ مسافة انتقال الجسم $= S(t) - S(0) = 10$

$\therefore t^2 - 3t + 11 - 11 = 10$

$t^2 - 3t = 10$

$\therefore t^2 - 3t - 10 = 0$

$(t + 2)(t - 5) = 0$

$\therefore t = -2$ مرفوض

أو $t = 5$

∴ ينتقل الجسم مسافة 10 متر بعد 5 ثوانٍ

2) معدل التغير $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = 6$

$\therefore \frac{b^2 - 2b + 3 - 6}{b - 3} = 6$ $\quad \therefore \frac{b^2 - 2b - 3}{b - 3} = 6$

$\therefore \frac{(b-3)(b+1)}{(b-3)} = 6$ $\quad \Rightarrow b \neq 3$ حيث

$\therefore b + 1 = 6$

$\therefore b = 5$