دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربيـــة والتعلـــيم
إدارة التقويم والامتحانات

المادة : الرياضيات

عدد صفحات الأسئلة : (8)

اجابة امتحان الفصل الدراسي الثاني للصف الثاني عشر العلمي
العام الدراسي 2009 / 2010 م

السؤال الأول :

أولاً : أوجد كلا من التكاملات الآتية :

$$(1)\int_{2}^{5}|x-3|dx=$$

$$\int_{2}^{3}(-x+3)dx+\int_{3}^{5}(x-3)dx=(-\frac{x^2}{2}+3x)+(\frac{x^2}{2}-3x)$$

$$=4\frac{1}{2}-4+(-2\frac{1}{2})-(-4\frac{1}{2})=2\frac{1}{2}$$

$$(2)\ \int\left(\pi+e^{\cot\pi x}\right)\csc^2\pi x\,dx=$$

$$=\int\pi\csc^2\pi x dx+\int e^{\cot\pi x}\csc^2\pi x dx=$$

$$=-\cot\pi x-\frac{1}{\pi}e^{\cot\pi x}+c$$

$$(3)\ \int\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}dx=$$

$$=-\ln|\cos x-\sin x|+c$$

$$(4)\ \int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx=$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+2\cos^2 x-1}{2}}dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx=\int_{0}^{\pi}|\cos x|dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos x dx=[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(1-0)-(0-1)=2$$

$$(5)\ \int\frac{2}{x^2-2x}dx$$

باستخدام الكسور الجزئيه

$$\frac{2}{x(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}\longrightarrow 2=A(x-2)+Bx\longrightarrow$$

$$A=-1,B=1\longrightarrow\int\frac{2}{x(x-2)}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-2}dx$$

$$=-\ln|x|+\ln|x-2|+c$$

ثانياً : إذا كانت كلا من الدالتين $G(x)$, $F(x)$ مشتقة عكسية للدالة $f(x)$ المتصله على $[2,6]$ وكان :

$$\int_2^6 \left(F(x)-G(x)\right)dx = 12$$

6) فاوجد قيمة $\int_2^6 \left(xF(x)-xG(x)+1\right)dx$

$$F(x)-G(x)=c \longrightarrow \int_2^6 c\,dx = 12 \longrightarrow 4c=12 \longrightarrow c=3$$

$$\int_2^6 \left(x\left(F(x)-G(x)\right)+1\right)dx = \int_2^6 (3x+1)dx = \left[\frac{3}{2}x^2+x\right]_2^6$$

$$=(54+6)-(6+2)=52$$

ثالثا :

7) تحقق من صحة المساواة التاليه :.. $\int \frac{2(1-x\ln x)}{xe^x}dx = e^{-x}\ln x^2 + c$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\ln x^2+c\right) = -e^{-x}\ln x^2 + \frac{2}{x}e^{-x} =$$

$$\frac{e^{-x}(2-2x\ln x)}{x} = \frac{2(1-x\ln x)}{xe^x}$$

8) اذا كانت $y = x + \int_{\tan x}^{0} \frac{1}{1+t^2}dt + 1$ بين أن $\frac{dy}{dx}=0$

$$y = x - \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt + 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1-1=0$$

رابعا : اذا كانت f دالة متصلة على الفترة $[1,3]$ ، لأي تجزيء p على الفترة $[1,3]$ كانت $\lim_{\|p\|\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(f(c_k)-3\right)\Delta x_k\right)=4$ فأوجد قيمة

(9) $\int_3^1 f(x)dx$

$$\int_1^3 \left(f(x)-3\right)dx = 4 \longrightarrow \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 3dx = 4$$

$$\int_1^3 f(x)dx - 6 = 4 \longrightarrow \int_1^3 f(x)dx = 10 \longrightarrow \int_3^1 f(x)dx = -10$$

السؤال الثاني :

أولاً : أوجد كلاً من :

(10) $\int \sqrt{x}\ sec^2\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)\ dx$ ⟸ استخدم التكامل بالتعويض

$$u = x^{\frac{3}{2}}-1 \longrightarrow du = \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx \longrightarrow dx = \frac{2}{3\sqrt{x}}du$$

$$\int \sqrt{x}\ \sec^2 u \frac{2}{3\sqrt{x}}du = \frac{2}{3}\tan u + c = \frac{2}{3}\tan\left(x^{\frac{3}{2}}-1\right)+c$$

(11) $\int x^4 \ln x\ dx$

$$u = \ln x, dv = x^4 dx \longrightarrow du = \frac{1}{x}dx,\ v = \frac{x^5}{5}$$

$$\int x^4 \ln x dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^4}{5}dx = \frac{x^5}{5}\ln x - \frac{x^5}{25}+c$$

12) اذا علمت أن : $f(x)=\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$ داله فرديه فأوجد قيمة التكامل التالي مع تبرير اجابتك

$$\int_{-3}^{3}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}+1\right)dx$$

منحنى $f(x)$ متماثل حول نقطة الأصل.وبالتالي فان.

$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 0$. ونستنتج من ذلك أن قيمة التكامل المطلوب هي $\int_{-3}^{3} 1dx = 6$

13) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[1,9]$ وكانت القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[1,4]$ تساوي 2

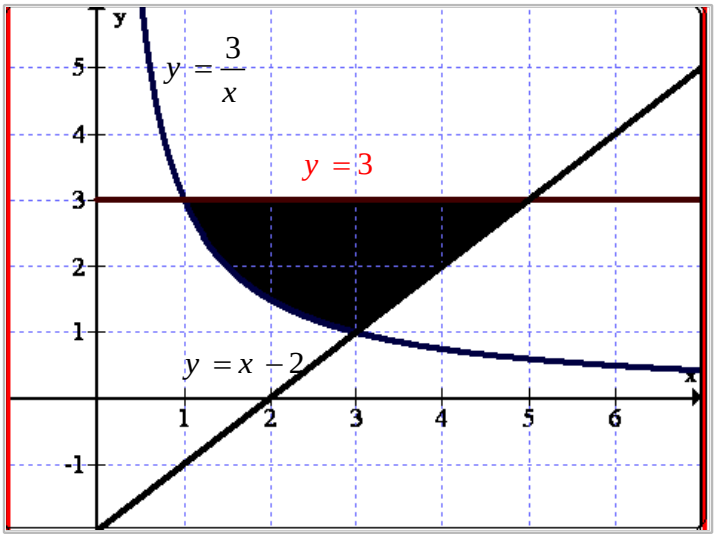
وكان $\int_{9}^{4} 3f(x)dx = 12$ فأوجد قيمة $\int_{1}^{9} f(x)dx$

وبالتالي فان : $\int_1^4 f(x)dx = av(f)\times(b-a) = 6$

$$\int_1^9 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^9 f(x)dx = 6-4 = 2$$

ثانياً :

14) أوجد مساحة المنطقة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى $f(x)=\frac{3}{x}$ **والمستقيم** $y=x-2$ والمستقيم $y=3$



$$A=\int_1^3\left(3-\frac{3}{x}\right)dx+\int_3^5(3-x+2)dx=$$

$$=\left[3x-3\ln|x|\right]_1^3+\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_3^5=$$

$$(9-3\ln 3)-3+\left(25-\frac{25}{2}\right)-\left(15-\frac{9}{2}\right)=4.7$$

ثالثا: 15) أوجد حجم المجسم الذي يقع بين مستويين عموديين على المحور السيني عند $x=1,\ x=-1$ **والمقاطع العرضيه العموديه على المحور السيني في** $[-1,1]$ **هي مربعات تقع أقطارها بين نصف الدائرة** $y=-\sqrt{1-x^2}$ **الى نصف الدائرة** $y=\sqrt{1-x^2}$

طول قطر المربع $2y=2\sqrt{1-x^2}$ ، مساحة المقطع $A(x)=2(1-x^2)$ ،حجم المجسم هو:

$$v=\int_{-1}^{1}2(1-x^2)dx=\left[2x-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

رابعا

16) يتحرك جسيم على خط مستقيم وكانت عجلته $a=\frac{dv}{dt}$ **تعطى بالعلاقة** $a=2\sqrt{v}$ **فاذا كانت** $v>0$، $v(0)=9m/\sec,\ s(1)=\frac{64}{3}m$ **أوجد كلا من السرعة** v **ودالة الموضع** s **كدالة في الزمن** t

$$\frac{dv}{dt}=2\sqrt{v}\longrightarrow\int\frac{dv}{2\sqrt{v}}=\int dt\longrightarrow\sqrt{v}=t+c$$

$$\sqrt{9}=0+c\longrightarrow c=3\longrightarrow\sqrt{v}=t+3\longrightarrow v=(t+3)^2$$

$$s=\int(t+3)^2\,dt\longrightarrow s=\frac{(t+3)^3}{3}+C$$

$$\frac{64}{3}=\frac{64}{3}+C\longrightarrow C=0\longrightarrow s=\frac{(t+3)^3}{3}$$

.....

.....

.....

السؤال الثالث :

أولاً : **الشكل** المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ **على الفترة** $[-3,4]$ **وهو يتكون من نصف دائرة وقطعتين مستقيمتين فاذا كانت** $g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt$. **استخدم الرسم البياني للإجابة عن الأسئلة التالية .**

f

(17) أوجد $g(1)$

$g(1)=\int_{-3}^{1} f(x)dx=\frac{1}{2}\ \pi(4)=2\pi$.

.....

(18) القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ **على الفترة** $[-3,1]$

$av(f)=\frac{1}{4}\int_{-3}^{1} f(x)dx=\frac{\pi}{2}$

.....

(19) أوجد قيمة x **التي تبلغ عندها** $g(x)$ **قيمتها العظمى . برر اجابتك.**

عند $x=1$ لأن $g(1)=\int_{-3}^{1} f(x)dx$ وهي تساوي قيمة المساحة المحصورة بين منحنى f ومحور السينات في الفترة $[-3,1]$ وهي تعبر عن أكبر قيمة للتكامل للدالة f على الفترة $[-3,4]$

أو من جدول الاشارات للمشتقة مع سلوك الدالة g (تزايد وتناقص – قيم قصوى) مع ملاحظة أن $g(1)>g(4)$

(20) أوجد معادلة المماس لمنحنى $g(x)$ **عند** $x=-1$

.....

.....

$g'(-1)=2,\ g(-1)=\int_{-3}^{-1} f(x)dx=\pi$

معادلة المماس

$y-\pi=2(x+1)$

(21) بين أن قيمة $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$ **تقع بين 14 ، 7 -**

$\min f\,(b-a)\le\int_{a}^{b} f(x)dx\le\max f\,(b-a)$ ⟶ .....

.....

$-1(4+3)\le\int_{-3}^{4} f(x)dx\le 2(4+3)$ .....

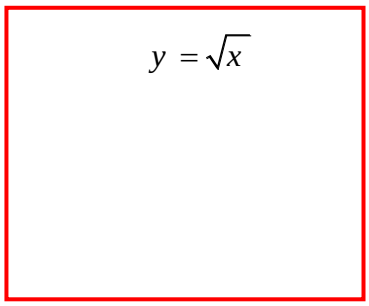
ثانياً : **(22) أوجد طول منحنى الدالة** $y=(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ **من** $x=0$ **إلى** $x=1$

.....

$\frac{dy}{dx}=3\sqrt{3+2x}\longrightarrow L=\int_{0}^{1}\sqrt{1+9(3+2x)}\,dx=\int_{0}^{1}\sqrt{28+18x}\,dx$

$=\frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right)\left[(28+18x)^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}=\frac{1}{27}\left(46^{\frac{3}{2}}-28^{\frac{3}{2}}\right)=6.1$

23) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $y=\sqrt{x}$ والمستقيمان $x=0, x=1$ دورة كاملة حول المستقيم $y=-1$



$$r=\sqrt{x}+1 \longrightarrow A(x)=\pi\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \longrightarrow$$

$$v=\pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\pi\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1\right)-0\right)=\frac{17}{6}\pi$$

ثالثاً :

24) حل المعادلة التفاضلية $\sqrt{y}\,dx-\csc^2 x\,dy=0$

$$\sqrt{y}\,dx=\csc^2 x\,dy \longrightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}}=\sin^2 x\,dx \longrightarrow$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}dy=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)\,dx \longrightarrow 2\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+c$$

$$\sqrt{y}=\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C \longrightarrow y=\left(\frac{1}{4}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C\right)^2$$

رابعاً :

25) لتكن $f(x)$ دالة حيث مشتقتها الثانية $f''(x)$ متصلة على $[1,4]$ وكانت $f(1)=f'(4)=6\ ,\ f(4)=f'(1)=2$

استخدم التكامل بالتجزيء لايجاد $\int_1^4 xf''(x)dx$

$$u=x, dv=f''(x)dx \longrightarrow du=dx\ ,v=f'(x)$$

$$\int_1^4 xf''(x)dx=\left[xf'(x)\right]_1^4-\int_1^4 f'(x)dx=\left[xf'(x)\right]_1^4-\left[f(x)\right]_1^4$$

$$=\left(4(6)-1(2)\right)-(2-6)=26$$

السؤال الرابع :

أولاً : قطع مكافئ يمر بالنقطة $(-1,2)$ ورأسه النقطه $(3,6)$ ومحوره يوازي محور السينات أوجد :

26) معادلة هذا القطع .

$$x-h=a(y-k)^2 \longrightarrow (x-3)=a(y-6)^2$$

$$(-1-3)=a(2-6)^2 \longrightarrow a=\frac{-1}{4} \longrightarrow$$

$$(x-3)=\frac{-1}{4}(y-6)^2$$

27) أوجد إحداثيات البؤرة و معادلة دليله

البؤرة $(2,6)=\left(h+\frac{1}{4a},k\right)$ ، معادلة الدليل $x=h-\frac{1}{4a} \Rightarrow x=4$

ثانياً : 28) و ضح أن المعادلة $25x^2+16y^2+150x-160y=-225$ هي معادلة قطع ناقص

$$25(x^2+6x+9)+16(y^2-10y+25)=-225+225+400$$

$$25(x+3)^2+16(y-5)^2=400 \longrightarrow$$

$$\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$$

وهي تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر رأسي.

ثم أوجد :

$a=5$
$b=4$
$c=3$

29) المركز

المركز $(-3,5)$.

30) البؤرتان

$(h,k+c),(h,k-c) \longrightarrow (-3,8),(-3,2)$

31) نقطتي طرفي المحور الأكبر

$(h,k+a),(h,k-a) \longrightarrow (-3,10),(-3,0)$

32) نقطتي طرفي المحور الأصغر

$$(h+b,k),(h-b,k)\longrightarrow(1,5),(-7,5)$$

ثالثاً : قطع مخروطي معادلته $2x-3y=\dfrac{36}{2x+3y}$

33)أكتب معادلة القطع في الصورة القياسيه. وماسم هذا القطع؟

$$4x^2-9y^2=36\longrightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

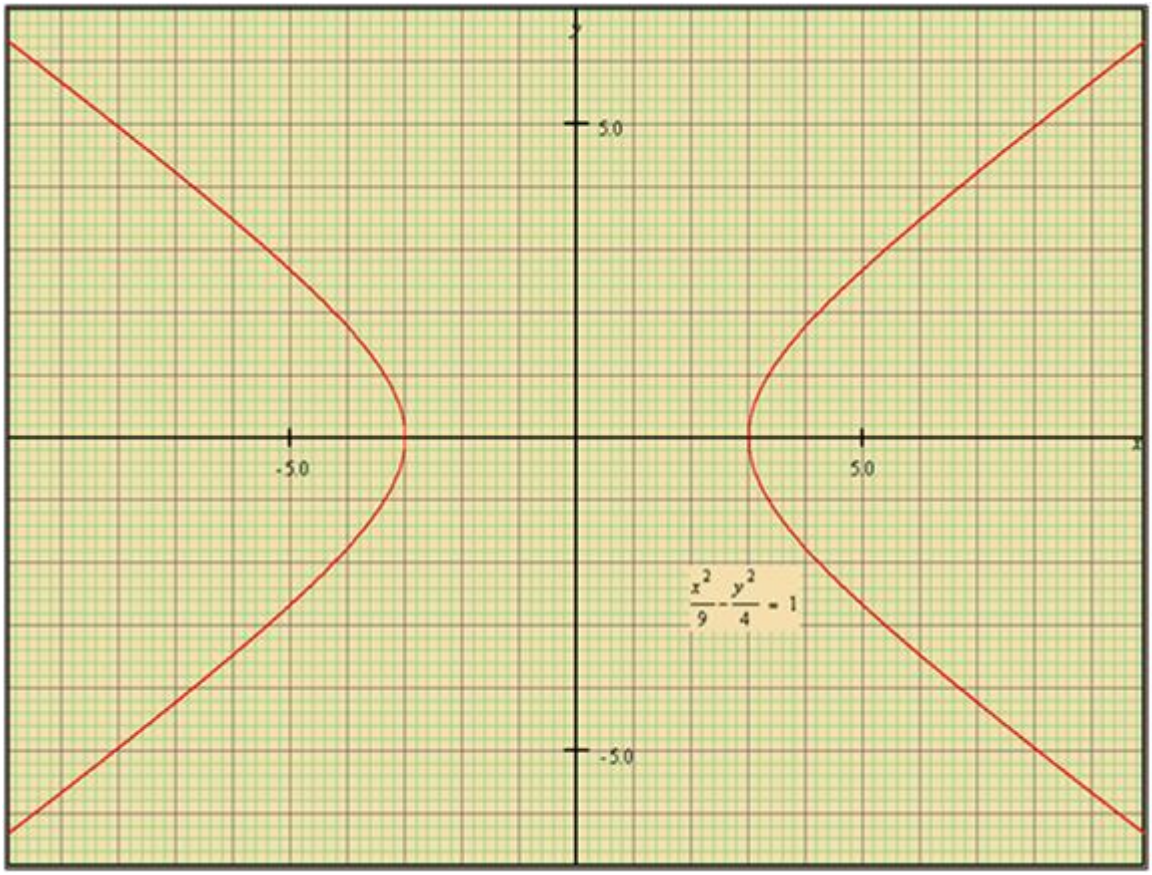
وهي تمثل معادلة قطع زائد في الصورة القياسية

$a=3$
$b=2$
$c=\sqrt{13}$

34) أوجد المركز والبؤرتين

المركز $(0,0)$، البؤرتان.. $(\sqrt{13},0),(-\sqrt{13},0)$

35) ارسم هذا القطع



تمنياتنا لطلابنا بالنجاح والتفوق