الارتبـــــــــاط

Correlation

1) الارتباط الطردي (الموجب) :

يكون الارتباط طرديا (موجبا) إذا زادت قيمة أحد المتغيرين بزيادة قيمة المتغير الآخر ، أو إذا نقصت قيمة أحد المتغيرين بنقصان قيمة المتغير الآخر .

2) الارتباط العكسي (السالب) :

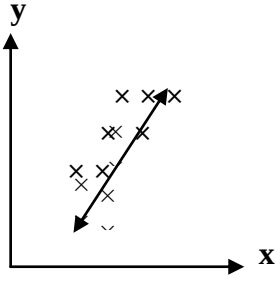
يكون الارتباط عكسيا (سالبا) إذا زادت قيمة أحد المتغيرين بنقصان قيمة المتغير الآخر ، أو إذا نقصت قيمة أحد المتغيرين بزيادة قيمة المتغير الآخر .

3) شكل الانتشار :

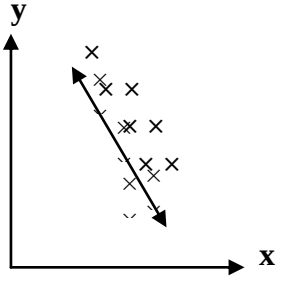
هو التمثيل البياني الناتج من تمثيل الأزواج المرتبة $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),.....,(x_n,y_n)$ **بيانيا في المستوى ألإحداثي ، حيث** x **يمثل المتغير الأول ،** y **يمثل المتغير الثاني .**

ملاحظة : إذا أمكن رسم خط مستقيم يتناسب مع النقاط يكون الارتباط في هذه الحالة خطيا .

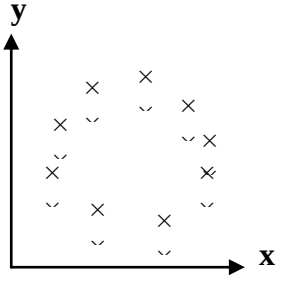
لاحظ الأشكال التالية :



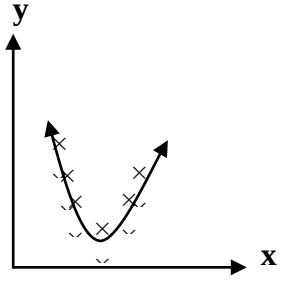
ارتباط خطي طردي (موجب)



ارتباط خطي عكسي (سالب)



ارتباط غير خطي

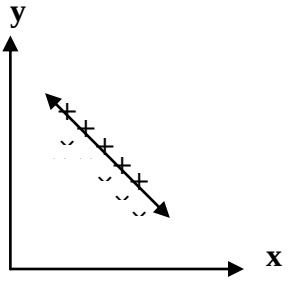


ارتباط غير خطي

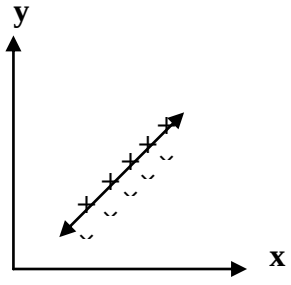
4) الارتباط التام :

يكون الارتباط تاما إذا وقعت جميع نقاط شكل الانتشار على خط مستقيم .

لاحظ الأشكال التالية :



ارتباط عكسي خطي تام



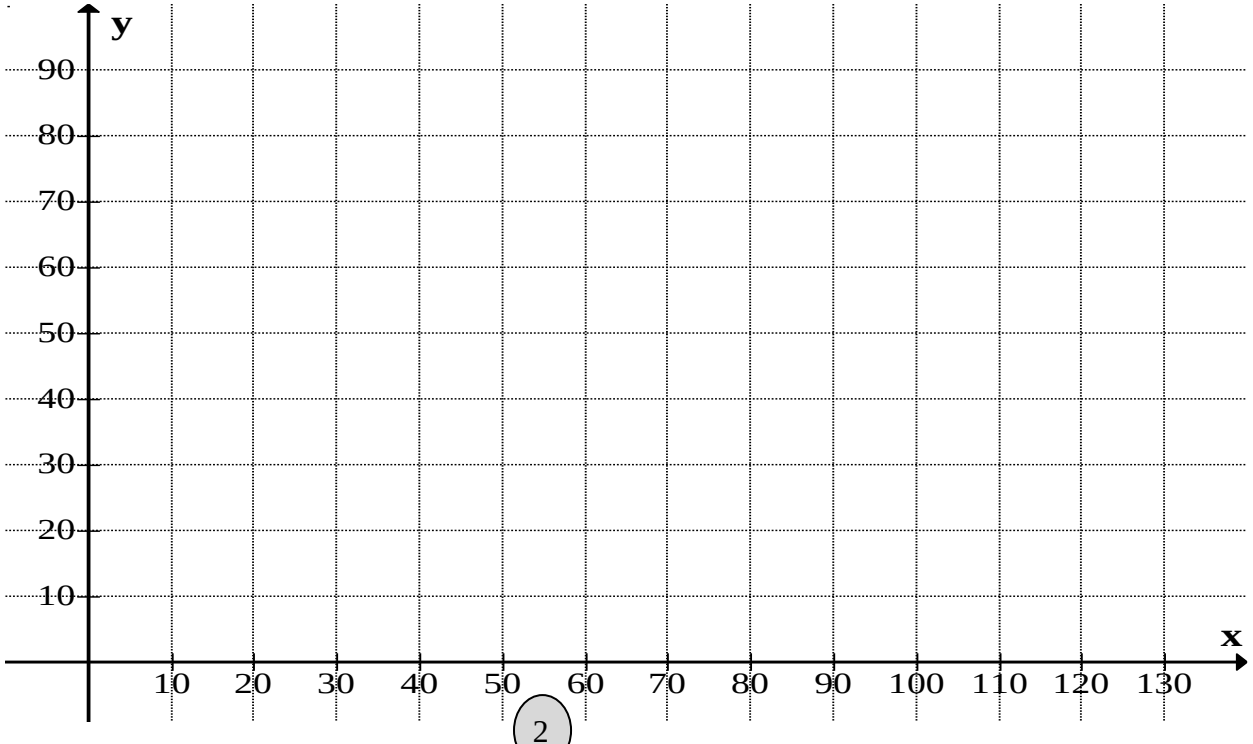
ارتباط طردي خطي تام

تدريبات

- **الجدول التالي يمثل درجات 7 طلاب في اختبار الذكاء ، ودرجاتهم في اختبار الرياضيات :**

درجات اختبار الذكاء (x)	110	120	105	100	125	130	115
درجات اختبار الرياضيات (y)	75	70	50	55	87	90	75

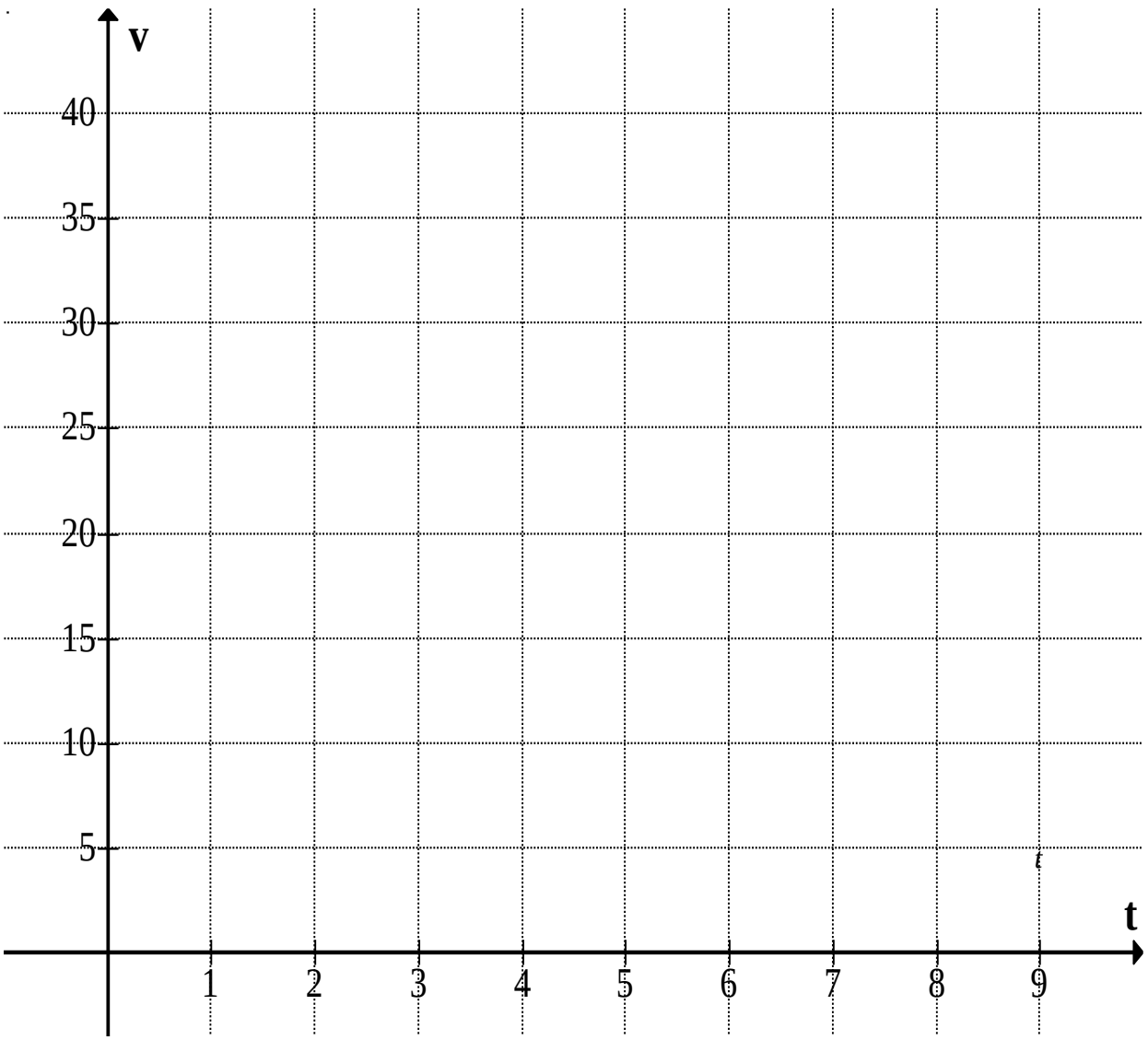
ارسم شكل الانتشار ، وبين نوع الارتباط بين درجات الطلبة في اختبار الذكاء ودرجاتهم في اختبار الرياضيات



- **يبين الجدول الآتي السرعة (v) مقدرة بالسنتيمترات لكل ثانية ، والزمن (t) بالثواني**

الزمن (t)	1	2	3	4	5	6	7
السرعة (v)	40	35	30	25	20	15	10

ارسم شكل الانتشار ، وبين نوع الارتباط بين الزمن (t) ، والسرعة (v)



معامل الارتبـــــــــاط

Correlation Coefficient

(معامل ارتباط بيرسون $r = \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{r=1}^{n} (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_X \times \sigma_y}$)

ملاحظات عامة

1) $-1 \le r \le 1$ حيث r معامل الارتباط .

2) يكون الارتباط طردياً إذا كان معامل الارتباط (r) موجباً .

3) يكون الارتباط عكسياً إذا كان معامل الارتباط (r) سالباً .

4) إذا كانت قيمة معامل الارتباط $r = 0$ فإن الارتباط معدوم .

5) إذا كانت قيمة معامل الارتباط $r = -1$ فإن الارتباط عكسي تام .

6) إذا كانت قيمة معامل الارتباط $r = 1$ فإن الارتباط طردي تام .

7) إذا كانت $|r| < 0.5$ (القيمة المطلقة لمعامل الارتباط (r) أقل من 0.5) فإن ***الارتباط ضعيف***

أمثلة : 1) $r = 0.25$ طردي ضعيف

2) $r = -0.48$ عكسي ضعيف

8) إذا كانت $0.5 \le |r| < 0.8$ فإن ***الارتباط متوسط*** .

أمثلة :

1) $r = -0.75$ عكسي متوسط

2) $r = 0.52$ طردي متوسط

9) إذا كانت $|r| \ge 0.8$ (القيمة المطلقة لمعامل الارتباط (r) أكبر من أو يساوي 0.8) فإن الارتباط قوي .

أمثلة :

1) $r = -0.98$ عكسي قوي

2) $r = 0.81$ طردي قوي

تدريبات

- **اذكر درجة ونوع الارتباط بين المتغيرين** x ، y **في كل مما يأتي حيث** r **هو معامل الارتباط**

درجته	نوعه	معامل الارتباط (r)	درجته	نوعه	معامل الارتباط (r)
− − −	− − −	$r = -0.94$	− − −	− − −	$r = 0.9$
− − −	− − −	$r = -0.65$	− − −	− − −	$r = 0.37$
− − −	− − −	$r = 0.09$	− − −	− − −	$r = 0$
− − −	− − −	$r = 1$	− − −	− − −	$r = -1$

- **إذا كان** $\sum_{n=1}^{n=20}(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = -900$ ، $n = 20$ ، $\sigma_x = 5$, $\sigma_y = 10$

1) **احسب معامل ارتباط بيرسون** (**معامل ارتباط بيرسون** $r = \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{r=1}^{n}(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_X \times \sigma_y}$)

---

2) **حدد درجة ونوع الارتباط بين المتغيرين** x ، y

- **يوضح الجدول التالي عدد الأجهزة المبيعة x من قبل العاملين في أحد المتاجر ومدة خبرة كل منـــــــهم y .**

عدد الأجهزة المبيعة x	12	15	7	6	8	10	9
سنوات الخبرة للعاملين y	9	13	6	4	11	8	5

فإذا كانت $\bar{y}=8$ $\bar{x}=10$ ، $\sigma_y=3$ $\sigma_x=2.9$

احـســــــب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين x ، y ثم حدد نوع الارتباط ودرجته .

حيث أن معامل الارتباط $r=\frac{1}{n}\times\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sigma_x\times\sigma_y}$

x	$x-\bar{x}$	y	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
9		5		
10		8		
8		11		
6		4		
7		6		
15		13		
12		9		
المجموع				

- **يوضح الجدول التالي درجات ثمانية طلاب في امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول وامتحان نهاية العام في مادة الرياضيات .**

(النهاية العظمى لكل منها 100 درجة)

رقم الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8
درجة الفصل الدراسي الأول x	75	65	62	81	95	90	71	85
درجة نهـــــاية العـــام y	80	70	65	85	90	95	75	80

فإذا كانت $\bar{y} = 80$ $\bar{x} = 78$ ، $\sigma_y = 9.4$ $\sigma_x = 11$

احـســـــب معامل ارتباط بيرسون r بين المتغيرين x ، y

ثم حدد نوع الارتباط ودرجته .

حيث أن معامل الارتباط $r = \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \times \sigma_y}$

الانحدار

Regression

أولاً: معادلة انحدار y على x هي : $\boxed{y = a\,x + b}$

لإيجاد معادلة انحدار y على x :

- نجد قيمة a من العلاقة $a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \times r$ حيث r معامل الارتباط .
- نجد قيمة b من العلاقة $b = \overline{y} - a \times \overline{x}$
- نعوض قيمتي a ، b في المعادلة $y = a\,x + b$

ثانياً : للتنبؤ بقيمة y بمعلومية x نعوض قيمة x في معادلة الانحدار $y = a\,x + b$

ثالثاً : الخطأ في التنبؤ = قيمة y الفعلية - قيمة y المتنبأ بها

تمارين

- x ، y متغيران معامل الارتباط بينهما 0.85 ، فإذا كان :

$\overline{x} = 9$, $\overline{y} = 7$, $\sigma_x \approx 2.7$, $\sigma_y \approx 2$ فأوجد :

1) معادلة انحدار y على x .

---

2) إذا كانت إحدى قيم x تساوي 8 فما هي قيمة y المتنبأ بها ؟

---

3) خطأ التنبؤ في قيمة y عندما $x = 9$ وقيمة y الفعلية تساوي **6**

- **x , y متغيران معامل الارتباط بينهما = 0.9 حيث x عدد الساعات الدراسية في اليوم ، y الدرجة المستحقة فإذا كان**

$$\overline{x} = 6 \qquad \overline{y} = 75$$

$$\sigma_x = 3 \qquad \sigma_y = 15$$

فأوجـــــــــــــد :

1) معادلة خط الانحدار y على x

---

2) خطأ التنبؤ في قيمة y عندما x = 7 وقيمة y الفعلية 82 درجة

- **يمثل الجدول التالي درجات 5 طلاب في امتحاني الفيزياء والرياضيات**

(حيث الدرجة العظمى لكل منهما 40 درجة)

رقم الطالب	1	2	3	4	5
درجة الرياضيات (x)	25	20	30	35	15
درجة الفيزياء (y)	20	22	35	36	17

$\overline{x} = 25$, $\overline{y} = 26$, $\sigma_x \approx 7.9$, $\sigma_y \approx 8.86$

1) أملأ الجدول التالي بما يناسبه :

x	$x - \overline{x}$	y	$y - \overline{y}$	$(x - \overline{x})(y - \overline{y})$
25		**20**		
20		**22**		
30		**35**		
35		**36**		
15		**17**		
المجمـــوع				

2) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين x ، y **(استخدم** $r = \frac{1}{n} \times \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sigma_X \times \sigma_y}$ **)**

$r =$ ----------

---

3) حدد درجة ونوع الارتباط بين المتغيرين x ، y **----------**

4) أوجد معادلة انحدار y **على** x **.**

---

5) إذا كانت درجة أحد الطلاب في الرياضيات 28 فما هي درجته المتوقعة في الفيزياء

القيمة المعيارية

Standard Value

تعريف :

إذا كانت x مشاهدة في توزيع متوسطه الحسابي $\bar{X}$ وانحرافه المعياري σ

فإن القيمة المعيارية (Z) للمشاهدة (x) هي :

$$\boxed{Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}} \quad \text{حيث } \sigma \neq 0$$

ملحوظة :

تستخدم القيمة المعيارية للمقارنة بين مشاهدتين من توزيعين مختلفين

تدريبات

- **تقدم مجموعة من الطلاب لامتحاني الرياضيات (X) والفيزياء (Y)**

فوجد أن :

$$\sigma_Y = 6 \ , \ \bar{Y} = 70 \ , \ \sigma_X = 3 \ , \ \bar{X} = 60$$

فإذا حصل طالب في مادة الرياضيات على الدرجة 63 وفي مادة الفيزياء على الدرجة 75 .

ففي أي من الامتحانين كان تحصيله أفضل ؟

- **إذا كان المتوسط الحسابي لأطوال طلاب إحدى مدارس البنين 160 سم بانحراف معياري 8 سم ، والمتوسط الحسابي لأطوال طالبات إحدى مدارس البنات 145 سم وبـــــانحراف معياري 5 سم فإذا كان طول احد الطـــــلاب 170 سم ، وطـــول إحدى الطالبات 150سم .**

أوجـــــــــــــــــــد :

1) القيمة المعيارية لطول كل من الطالب والطالبة .

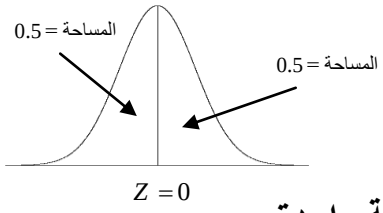
---

2) أيـــــهما أكثر طولاً بالنسبة لطلبة مدرسته ، ولمـــــــــــــاذا ؟

- **في امتحان الرياضيات كان المتوسط الحسابي $\overline{x} = 73$ لدرجة طلاب صف ما والانحراف المعياري $\sigma_x = 4$ وفي امتحان الفيزياء للصف نفسه كان المتوسط الحسابي لطلاب الصف هو $\overline{y} = 80$ والانحراف المعياري $\sigma_y = 5$ فإذا كانت درجة أحد الطلاب في امتحان الرياضيات هي 85 ودرجته في امتحان الفيزياء هي 90 ففي أي الامتحانين كان مستوى تحصيله أفضل .**

التوزيع الطبيعي

The Normal Distribution



خواص المنحنى الطبيعي المعياري($\sigma = 1$ ، $Z = 0$)

1) المساحة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي يساوي وحدة مساحة واحدة .

2) متناظر (متماثل) حول الخط الرأسي المار بالمتوسط الحسابي .

3) المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال .

4) لا يلتقي المنحنى مع المحور الأفقي وإنما يقترب منه كلما ابتعدنا عن المتوسط الحسابي يمينا أو يسارا .

5) محور التماثل يقسم المنطقة الواقعة بين المنحنى والمحور الأفقي إلى منطقتين متطابقتين مساحة كل منهما تساوي 0.5 وحدة مساحة .

تدريبات

- **أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والواقعة :**

1) بين $Z = 0$ ، $Z = 1.93$

---

2) بين $Z = 0$ ، $Z = -1.7$

---

3) بين $Z = 1.25$ ، $Z = 2$

---

4) بين $Z = -2.15$ ، $Z = -0.58$

تابع

5) بين $Z = -1.98$ ، $Z = 2.1$

---

6) على يمين $Z = 0$

---

7) على يسار $Z = 0$

---

8) على يمين $Z = 2.35$

---

9 **) على يمين** $Z = -2$

---

10) على يسار $Z = -1.44$

---

11) على يسار $Z = 1$

---

12) على يسار $z = 2.29$

تطبيقات على التوزيع الطبيعي

Application of the Normal Distribution

- **قدمت إدارة أحد متاجر مهرجان التسوق في دبي عرضاً يقضي بإعطاء هدية قيمة لكل شخص يشتري من المتجر بمبلغ 300 درهم أو أكثر دفعة واحدة ، وتوقعت الإدارة أن المبالغ التي سينفقها الزبائن خلال مدة العرض تتخذ الشكل الطبيعي بمتوسط حسابي يساوي 200 درهما وانحراف معياري يساوي 50 درهما .**

أوجد النسبة المئوية للزبائن الذين سيحصلون على هدية

- **مدرسة تحوي 500 طالب تتخذ أوزانهم شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي مقداره 60kg وانحراف معياري مقداره 8kg . احسب :**

1) النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أوزانهم عن 52kg .

---

2) عدد الطلاب الذين تتروح أوزانهم بين 60kg ، 80kg

- **مدينة عدد سكانها 60000 نسمة تتخذ أطوالهم شكل التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي 155cm وانحراف معياري 15cm . أوجد :**

1) النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أطوالهم عن 160cm

---

2) عدد السكان الذين يزيد طول كل منهم عن أو يساوي 180cm