أولاً : الدالة المقابلة

تذكير : *Antiderivative Function*

- **أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :**

$a)\quad f(x)=x^{2}+6x^{-3}-5$

$b)\quad h(x)=(x-3)(5x^{2}+4)$

$c)\quad k(x)=\dfrac{3x+5}{x^{2}}$

تعريف

تكون الدالة $N(x)$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **على** $[a,b]$

إذا كانت $N'(x)=f(x)$ **لكل** $x\in]a,b[$

- بين أن الدالة $N(x)=4x^3+5x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=12x^2+5$ على $[-2,3]$.

.....

.....

.....

- بين أن الدالة $N(x)=\frac{3}{4}x^4-\sqrt{3}x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=3x^3-\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

- **بيّن أن الدالة** $N(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-1$ **هي دالة مقابلة للدالة** $f(x)=x^2-4x$ **على** $[1,5]$

.....

.....

.....

- **بيّن أن الدالة** $N(x)=(x-1)(2x^3+3)$ **هي دالة مقابلة للدالة** $h(x)=8x^3-6x^2+3$

.....

.....

.....

- **بيّن أن الدالة** $N(x)=x-\frac{1}{x}$ **هي دالة مقابلة للدالة** $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$ **حيث** $x>0$

.....

.....

.....

- حدد أي الدوال التالية هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=2x^2-4x$

1) $N_1(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+2$

.....

2) $N_2(x)=\frac{2}{3}x^3+2x^2$

.....

3) $N_3(x)=x^3-2x^2$

.....

4) $N_4(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+a$ ، حيث a ثابت

.....

- **أكمل الفراغات التالية بما يناسبها لتحصل على عبارة صحيحة في كل منها :**

1) إذا كانت $N(x)=2\sqrt{x}$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **فإن :**

$f(x)=$----------

2) إذا كانت $N(x)=x^{-2}+4$ **دالة مقابلة للدالة** $k(x)$ **فإن :**

$k(x)=$----------

3) إذا كانت $N(x)=\frac{1}{x}$ **دالة مقابلة للدالة** $h(x)$ **فإن :**

$h(x)=$----------

- **ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :**

1) **إذا كانت** $N(x)=x-x^2$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **فإن** $f(x)$ **تساوي**

$a)\ \ 1-x$ $\qquad$ $b)\ \ 1-2x$

$c)\ \ -2x$ $\qquad$ $d)\ \ 1+2x$

2) **أي من الدوال التالية هي دالة مقابلة للدالة** $f(x)=12x^2-2$

$a)\ \ N_1(x)=24x$ $\qquad$ $b)\ \ N_2(x)=4x^3-2x+1$

$c)\ \ N_3(x)=4x^3+5$ $\qquad$ $d)\ \ N_4(x)=24x^3-2$

3) الدالة $N(x)=x^2+3x-5$ **هي دالة مقابلة للدالة**

$a)\ \ f(x)=x^3+3x^2-5x$ $\qquad$ $b)\ \ h(x)=2x+3$

$c)\ \ t(x)=2x-5$ $\qquad$ $d)\ \ k(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-5x$

4) إذا كانت $f(x)=3x^2-4x$ **فإن الدالة المقابلة لها** $N(x)$ **تساوي**

$a)\ \ x^3+2x+c$ $\qquad$ $b)\ \ x^3-2x^2+c$

$c)\ \ 4x^2-3x$ $\qquad$ $d)\ \ 6x-4$

ثانياً : التكامل غير المحدد

تمهيد : ***Indefinite Integral***

إذا كانت $f(x)=2x+6$ **فإن كل من الدوال التالية هي دوال مقابلة للدالة** $f(x)$ **:**

$a)\quad N_1(x)=x^2+6x+4 \Rightarrow N'_1(x)=----------$

$b)\quad N_2(x)=x^2+6x-3 \Rightarrow N'_2(x)=----------$

$c)\quad N_3(x)=x^2+6x+\sqrt{5} \Rightarrow N'_3(x)=----------$

لاحظ أن :

- **كل دالة مقابلة للدالة** $f(x)=2x+6$ **تختلف عن الأخرى باختلاف العدد الثابت .**
- **يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة** $f(x)$ **.**
- **الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة** $f(x)=2x+6$ **هي** $N(x)=x^2+6x+c$ **حيث** c **عدد حقيقي ثابت .**
- **تُسمى الصورة العامة للدوال المقابلة للدالة** $f(x)$ **بالتكامل غير المحدد للدالة** $f(x)$ **ويُرمز إليه بالرمز** $\int f(x)dx$ **ويُقرأ : التكامل غير المحدد للدالة** $f(x)$ **ويسمى الثابت** c **بثابت التكامل .**

قواعد التكامل غير المحدد :

$1)\quad \int a\,dx = ax+c$ **حيث** a **عدد حقيقي ثابت**

مثال (1) : أوجد كلاً مما يلي :

$a)\quad \int 6dx = ----------$ $\qquad b)\quad \int -2dx = ----------$

$c)\quad \int \frac{1}{3}dx = ----------$ $\qquad d)\quad \int dx = ----------$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ **حيث n عدد حقيقي ثابت**

مثال (2) : أوجد كلاً مما يلي :

$a)\ \int x dx = \text{----------}$ $b)\ \int x^4 dx = \text{----------}$

$c)\ \int x^{-4} dx = \text{----------}$ $d)\ \int x^{\frac{3}{4}} dx = \text{----------}$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}$$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ **حيث a عدد حقيقي ثابت**

مثال (3) : أوجد كلاً مما يلي :

$a)\ \int 3x^2 dx = \text{----------}$ $b)\ \int -2x^4 dx = \text{----------}$

4) $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx$

$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \int f_3(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$

مثال (4) : أوجد كلاً مما يلي :

$a)\ \int (x^3 - 4x + 5)dx = \text{----------}$

$b)\ \int (2x^{-3} + x - \frac{1}{5})dx = \text{----------}$

تدريبات على التكامل غير المحدد

- **أوجد كلا من التكاملات التالية :**

1) $\int 2dx$ = ----------

2) $\int dx$ = ----------

3) $\int x^{2}\ dx$ = ----------

4) $\int x^{5}\ dx$ = ----------

5) $\int \sqrt[3]{x}\ dx$ = ----------

6) $\int \sqrt{3}\ dx$ = ----------

7) $\int \frac{1}{x^{5}}\ dx$ = ----------

أوجـــــــــــــــــد كلا من التكاملات التالية :

1) $\int 3x^{3}\ dx$ =----------

---

2) $\int 5x^{4}\ dx$ =----------

---

3) $\int 2x^{-4}\ dx$ =----------

---

4) $\int \sqrt[5]{x}\ dx$ =----------

---

5) $\int \frac{2}{x^{5}}\ dx$ =----------

أوجـــــــــــــــد كلا من التكاملات التالية :

1) $\int (2x^3 + 3)\ dx$ =----------

---

2) $\int (5x^4 + 3x^2)\ dx$ =----------

---

3) $\int (4x^2 + 2x\ )\ dx$ =----------

---

4) $\int (4\sqrt{x} - 2)\ dx$ =----------

---

5) $\int (4\sqrt[3]{x} - 2x^2)\ dx$ =----------

---

6) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}})\ dx$ =----------

أوجـــــــــــــــــد كلا من التكاملات التالية :

1) $\int 2x\,(3x+4)\;dx$ =----------

---

2) $\int (2x-2)(3x+4)\;dx$=----------

---

3) $\int (3-x)(x^2+4)\;dx$ =----------

---

4) $\int (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\;dx$=----------

---

5) $\int (3x-2)^2\;dx$ =----------

---

6) $\int 3(1+x)^2\;dx$ =----------

---

7) $\int x^{-3}(x^5+2x^3-x)\;dx$ =----------

أوجـــــــــــــــــد كلا من التكاملات التالية :

1) $\int \left(\frac{x^5 + 2x^4 - 12x^2}{x^2}\right) dx$ =----------

---

---

2) $\int \left(\frac{9x^4 + x^3 + 3x^2}{x^2}\right) dx$ =----------

---

---

3) $\int \left(\frac{x^4 + x^2 + 2x}{x^4}\right) dx$ =----------

---

---

4) $\int \left(\frac{2x^8 - 12x^5 + 4}{2x^5}\right) dx$ =----------

---

التكامل المحدد وخواصه

Definite Integral and its Properties

أولاً : التكامل المحدد

تعريف :

إذا كانت $f(x)$ **دالة معرفة على** $[a,b]$ **فإن يُرمز إلى التكامل المحدد للدالة** $f(x)$ **على** $[a,b]$

بالرمز : $\int_a^b f(x)dx$

ويُقرأ تكامل $f(x)$ **بالنسبة إلى** x **من** a **إلى** b **.**

ملاحظة : **المقدار** $\int_a^b f(x)dx$ **عدد حقيقي ثابت .**

نظرية :

إذا كانت $N(x)$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **على** $[a,b]$

فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = N(b) - N(a)$$

مثال (1) : إذا كانت $N(x) = 3x + 6$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **للدالة** $f(x)$ **على** $[2,6]$ **فإن :**

$$\int_2^6 f(x)dx = \text{----------}$$

مثال (2) : إذا كانت $N(x)$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **للدالة** $f(x)$ **على** $[0,4]$

وكان $\int_0^4 f(x)dx = 10$ ، $N(0) = 6$ **فأوجد** $N(4)$ **.**

مثال (3) : أوجد كلاً مما يلي :

$b)\ \int_{2}^{4} 5dx$ ــ

$b)\ \int_{-1}^{1} 2xdx$ ــ

$c)\ \int_{0}^{3} (3x^{2}+4)dx$ ــ

ــ

تدريبات

1) أوجد كلاً مما يلي :

1) $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{4}} 2dx$

---

2) $\int_{-1}^{3} 4x^{3}dx$

---

3) $\int_{-27}^{0} x^{\frac{1}{3}}dx$

---

4) $\int_{0}^{3} (x-2)dx$

تمارين متنوعة

أوجـــــــــــــــــد قيمة كلا مما يلي :

1) $\int_0^2 x^4\,dx$ =----------

---

2) $\int_1^3 (3x^2+2x)\,dx$ =----------

---

3) $\int_{-27}^0 x^{\frac{1}{3}}\,dx$ =----------

---

4) $\int_{-2}^1 \frac{3x-1}{5}\,dx$ =----------

---

5) $\int_2^1 x^5\,dx$ =----------

أوجـــــــــــــــد قيمة كلا مما يلي :

1) $\int_1^2 (\frac{1}{x^2} + x^3)\ dx$ =----------

---

2) $\int_{-1}^3 (2x+1)(x+1)\ dx$ =----------

---

3) $\int_1^5 (\frac{x^4 + x^3 - 2}{x^3})\ dx$ =----------

---

4) $\int_1^4 (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})\ dx$ =----------

---

5) $\int_1^2 (x + \frac{1}{x^2})\ dx$ =----------

ثانياً : خواص التكامل المحدد

Properties of definite integral

لتكن $f(x)$ ، **دالتين قابلتين للتكامل على** $[a,b]$ **فإن**

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

4) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

ويمكن تعميم الخاصية (4) **على الصورة :**

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm ... \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

مثال (1) : أكمل الفراغات التالية بما يناسبها :

$a)$ $\int_5^5 \sqrt{3x+7}dx = ----$

$b)$ $\int_{-1}^{-1} (4x^3 - 2x + 7)dx = ----$

مثال (2) : إذا كان $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 4$ ، $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -3$ **فإن :**

1) $\int_2^2 g(x)dx = ---$

2) $\int_{-1}^{2} 3f(x)dx = ----------$

3) $\int_2^{-1} g(x)dx = ---$

4) $\int_{-1}^{2} (f(x) + g(x))dx = ----------$

5) $\int_2^{-1} (4f(x) - 2g(x) + 3)dx = ----------$

- إذا علمت أن $\int_1^3 f(x)dx = -4$ ، $\int_1^3 g(x)dx = 3$

أوجـــــــــــــــــــــــد ما يلي :

1) $\int_1^3 (f(x)+g(x))dx =$ ----------

---

2) $\int_3^1 (4f(x))dx =$ ----------

---

3) $\int_3^3 (f(x))dx =$ ----------

---

4) $\int_1^3 (3g(x)+2x)dx =$ ----------

- **إذا كان** $\int_0^1 (3x^2 - a)\,dx = -19$ **فأوجـــــد قيمة a .**

- **إذا كان** $\int_0^a (3x^2)\,dx = 8$ **فأوجـــــد قيمة a .**

- **إذا كان** $\int_1^a 2\,dx = 4$ **فأوجـــــد قيمة a .**

- **إذا كان** $\int_0^k (2x + k)\,dx = 6$ **فأوجـــــد قيمة k**

- **إذا كان** $\int_0^b (2x - b)\,dx = -2$ **فأوجـــــد قيمة b .**

- **ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :**

1) $2\int_{3}^{3} f(x)dx = \text{---------}$

$a)\ 2 \qquad b)\ 5 \qquad c)\ 0 \qquad d)\ 10$

2) $\int_{9}^{9} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \text{---------}$

$a)\ \frac{1}{6} \qquad b)\ \frac{1}{9} \qquad c)\ 9 \qquad d)\ 0$

3) $\int_{-2}^{0} -dx = \text{---------}$

$a)\ -2 \qquad b)\ 2 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ -4$

4) $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \text{---------}$

$a)\ 3 \qquad b)\ \frac{-1}{2} \qquad c)\ 3 \qquad d)\ -3$

5) **إذا كان** $\int_{1}^{3} cdx = 10$ **فإن قيمة** c **حيث عدد ثابت يساوي**

$a)\ -5 \qquad b)\ 5 \qquad c)\ 10 \qquad d)\ -10$

6) **إذا كان** $\int_{1}^{2} g(x)dx = 5$ **فإن** $\frac{1}{5}\int_{2}^{1} g(x)dx = \text{------}$

$a)\ 5 \qquad b)\ \frac{1}{5} \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -1$

7) **إذا كان** $\int_{1}^{3} f(x)dx = 8$ **فإن** $\int_{3}^{1} f(x)dx + 5 = \text{------}$

$a)\ 13 \qquad b)\ -13 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ -3$

8) **إذا كان** $\int_{4}^{2} h(x)dx = -2$ **فإن قيمة** $\int_{2}^{4} 2h(x)dx$ **يساوي**

$a)\ -4 \qquad b)\ 0 \qquad c)\ 6 \qquad d)\ 4$

9) **إذا كانت** $N(x)$ **دالة مقابلة للدالة** $f(x)$ **حيث** $N(3) = 8$, $N(2) = 5$

فإن $\int_{2}^{3} f(x)\ dx$

$a)\ 3 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ 40 \qquad d)\ -3$

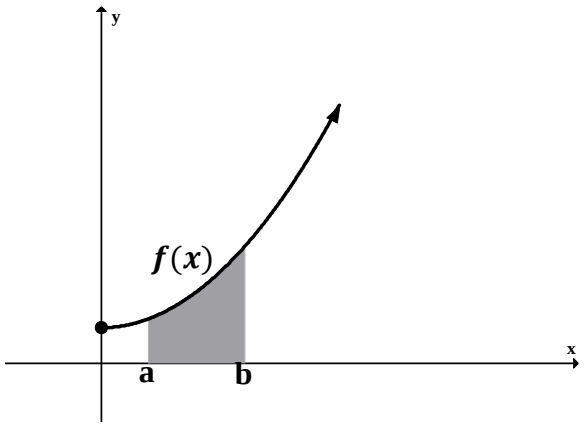
مساحة منطقة محصورة بين منحنى دالة ومحور السينات

Area Between a Curve and the X –Axis

نظرية :

1) إذا كانت الدالة f متصلة على $[a\,,b]$ ، $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a\,,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي :

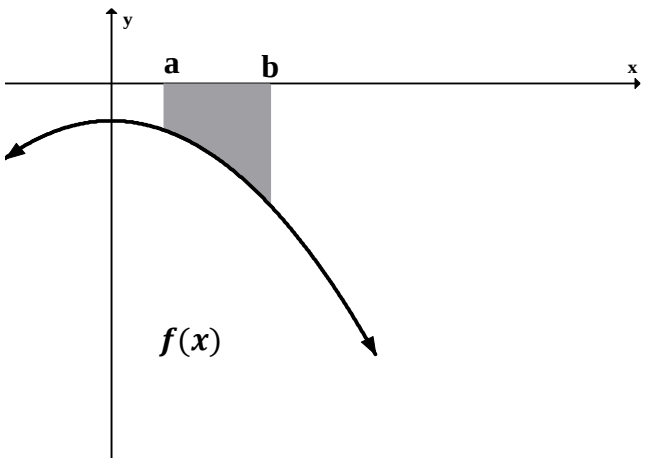
$$A = \int_a^b f(x)dx$$



$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)dx$$

2) إذا كانت الدالة f متصلة على $[a\,,b]$ ، $f(x) \leq 0$ لكل $x \in [a\,,b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي :

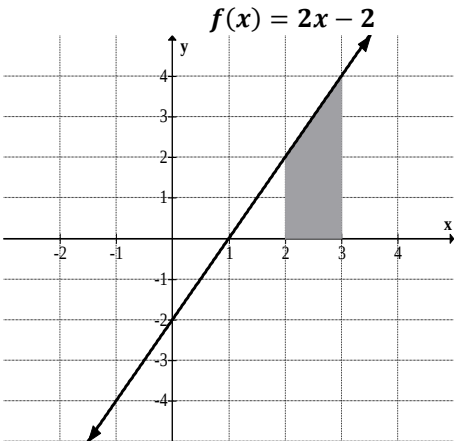
$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

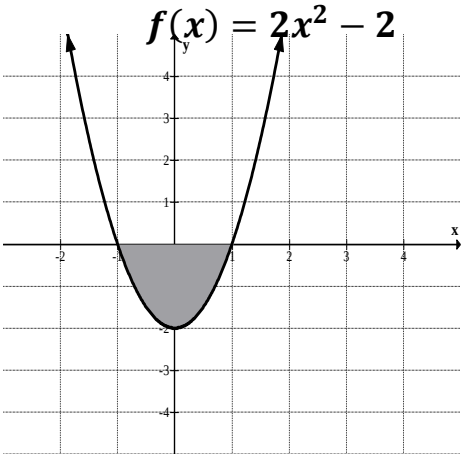


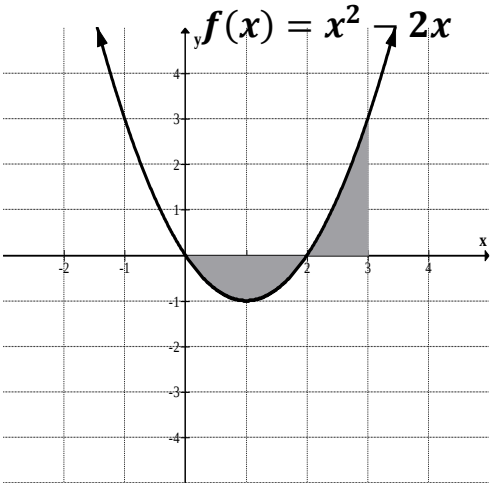
$$\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)dx$$

تدريبات

- **أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل من الأشكال التالية**

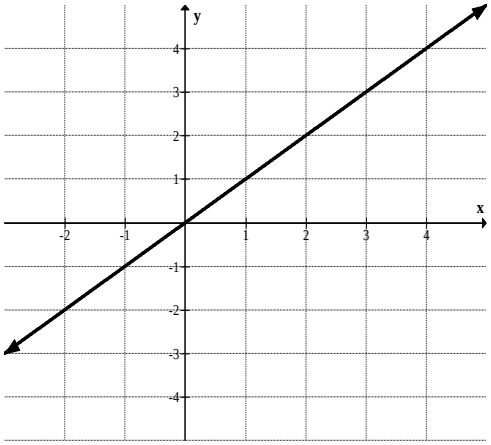






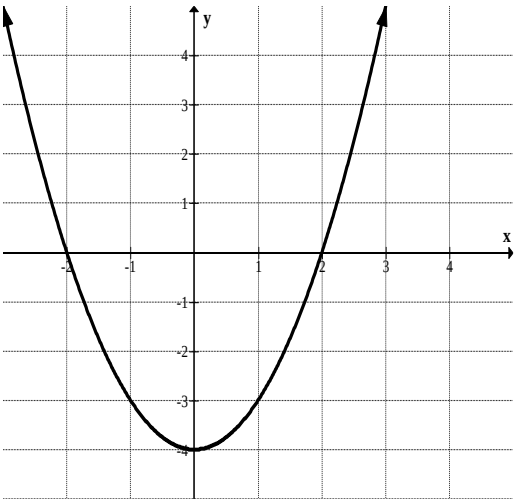
- **معتمدا على الشكل المجاور أوجد مساحة المنطقة المطلوبة :**

1) **بين منحنى** $f(x) = x$ **،** **ومحور السينات** **والمستقيمين** $x = 1$ ، $x = 2$



---

2) **بين منحنى** $G(x) = x^2 - 4$ ، **ومحور السينات** **والمستقيمين** $x = -1$ ، $x = 2$



---

3) **بين منحنى** $f(x) = 3x - x^2$ ، **ومحور السينات** **والمستقيمين** $x = 0$ ، $x = 4$