دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربيـــة والتعلـــيم

المادة : الرياضيات
عدد صفحات الأسئلة : (7)

نموذج إجابة الامتحان التجريبي للفصل الدراسي الثاني للصف الثاني عشر العلمي
اللعام الدراسي 2008 / 2009 م

السؤال الأول:

أولا : لتكن الدالة $y = 2x - x^2$ استخدم طريقة التقريب اليميني بالمستطيلات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$ وذلك بتقسيم الفترة $[0,2]$ إلى 4 فترات جزئية متساوية في الطول .

طول الفترة $= \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$ $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right],\left[1,\frac{3}{2}\right],\left[\frac{3}{2},2\right]$

A مجموع مساحة المستطيلات الأربعة $A \approx \frac{1}{2}\left[f(0.5)+f(1)+f(1.5)+f(2)\right]$

$$\approx \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}+1+\frac{3}{4}+0\right] = \frac{5}{4} = 1.25$$

ثانياً : إذا كانت المعادلة $4y^2+16x = (x-2)(x+18)$ تمثل قطعاً زائداً اوجـد :

1) المركز لهذا القطع .

$$4y^2+16x = x^2+16x-36$$

$$x^2-4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9} = 1$$

المركز $(0,0)$

2) البؤرتين .

$$c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow c = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$$

البؤرتان هما $(\pm 3\sqrt{5},0)$

3) نقطتي طرفي المحور القاطع .

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$$

$(\pm 6,0)$

4) معادلتي الخطين التقاربيين .

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad y = \pm\frac{3}{6}x \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$$

يتبع صفحة 2

ثالثاً : آلة تصوير قيمتها عند الشراء درهم $R = 2500$ وتتناقص قيمتها بالنسبة للزمن t بمعدل $\frac{dR}{dt} = \frac{-500}{(t+1)^2}$ أوجد قيمة هذه الآلة بعد ثلاث سنوات .

$$\frac{dR}{dt} = -500(t+1)^{-2} \qquad \int dR = \int -500(t+1)^{-2} dt$$

$$R = \frac{-500(t+1)^{-1}}{-1} + c = \frac{500}{(t+1)} + c$$

$$R(0) = 2500 \Rightarrow 2500 = 500 + c \Rightarrow c = 2000$$

$$R(t) = \frac{500}{(t+1)} + 2000 \Rightarrow R(3) = \frac{500}{(3+1)} + 2000 = 2125 \text{ درهم}$$

السؤال الثاني :

أولاً : أ) إذا كانت $f(x) = \frac{\pi \sin x}{4}$ أوجـــــد : اوجد:

1) القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في الفترة $[0, \pi]$.

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{4} dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin x dx = \left[\frac{-1}{4}\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\frac{-1}{4}\cos \pi\right] - \left[\frac{-1}{4}\cos 0\right] = \frac{1}{2}$$

2) عند أي من النقاط في الفترة $[0, \pi]$ تأخذ الدالة هذه القيمة المتوسطة .

$$f(c) = av(f)$$

$$\frac{\pi}{4}\sin c = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin c = \frac{2}{\pi} \Rightarrow c = 0.69 \text{ أو } \pi - 0.69 = 2.45$$

ب) إذا علمت أن القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[1,4]$ يساوي 8 و القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[4,6]$ يساوي K و القيمة المتوسطة للدالة f على الفترة $[1,6]$ يساوي 18 أوجد قيمة K .

$$8 = \frac{1}{3}\int_1^4 f(x)dx \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = 24 \qquad \int_1^6 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$$

$$k = \frac{1}{2}\int_4^6 f(x)dx \Rightarrow \int_4^6 f(x)dx = 2k \qquad 90 = 24 + 2k \Rightarrow k = 33$$

$$18 = \frac{1}{5}\int_1^6 f(x)dx \Rightarrow \int_1^6 f(x)dx = 90$$

يتبع صفحة 3

ثانياً : أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

1) $y = \ln(\tan 2x)^3$

$y = 3\ln(\tan 2x)$

$\frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{2\sec^2 2x}{\tan 2x} = 6\sec^2 2x \cot 2x$

2) $y = \int_{\sin x}^{\sqrt{x}} (1+t^2)dt$

$\frac{dy}{dx} = (1+(\sqrt{x})^2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - (1+\sin^2 x)\cos x$

$\frac{(1+x)}{2\sqrt{x}} - \cos x\,(1+\sin^2 x)$

ثالثاً : احسب كلاً من التكاملات الآتية :

1) $\int (5x^3 - 2x^2 - 8)dx$

$= \frac{5x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 8x + c$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+5)^3} dx$ $\quad u = \sqrt{x} + 5 \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(u)^3} 2\sqrt{x}\,du = \int \frac{2}{(u)^3} du = 2\int (u)^{-3} du \Rightarrow 2\frac{(u)^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{(\sqrt{x}+5)^2} + c$

3) $\int \frac{5x+8}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{5x+8}{(x+2)(x+1)} dx = \int (\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1})dx$

$A(x+1) + B(x+2) = 5x + 8 \Rightarrow A = 2, B = 3$

$= \int (\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+1})dx = 2\ln|x+2| + 3\ln|x+1| + c$

4) $\int \tan^2 x \sec^2 x \; dx$ $\quad u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$\int u^2 \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c \Rightarrow \frac{\tan^3 x}{3} + c$

5) $\int x^2 \cos x \; dx$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

$f(x)$	$g(x)$	
f x^2	$\cos x$	+
f' $2x$	$\sin x$	−
f'' 2	$-\cos x$	+
f''' 0	$-\sin x$	

يتبع صفحة 4

السؤال الثالث :

أولاً : استخدم التكامل بالتعويض ثم بالأجزاء لإيجاد $\int \cos\sqrt[3]{x}\ dx$

نكامل بالتعويض

$w=\sqrt[3]{x} \Rightarrow dw=\frac{1}{3}(x)^{\frac{-2}{3}}dx \Rightarrow dx=3\sqrt[3]{x^2}dw$

$\Rightarrow dx=3(\sqrt[3]{x})^2dw=3(w)^2dw$

نكامل بالأجزاء

$\int 3w^2\cos w\ dw$

$f(w)$		$g(w)$
f $3w^2$	+	$\cos w$
f' $6w$	−	$\sin w$
f'' 6	+	$-\cos w$
f''' 0		$-\sin w$

$=3w^2\sin w+6w\cos w-6\sin w+c$

$=3(\sqrt[3]{x})^2\sin(\sqrt[3]{x})+6(\sqrt[3]{x})\cos(\sqrt[3]{x})-6\sin(\sqrt[3]{x})+c$

ثانياً : بين أن $\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}dx \geq \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$ علماً بأن $x \geq x^2$ لكل x تنتمي لـ $[0,1]$

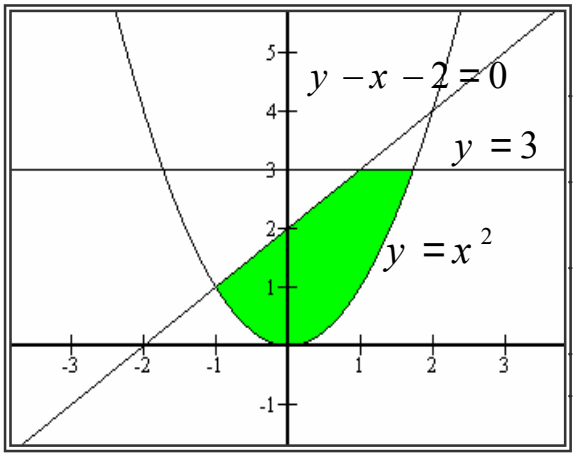
لأن $x \geq x^2 \Rightarrow x^2 \geq x^4$ (تربيع الطرفين.)

$1+x^2 \geq 1+x^4$ (إضافة واحد للطرفين)

$\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^4}$

لأن x^2 موجب $\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} \leq \frac{x^2}{1+x^4} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}dx$

ثالثاً : من خلال الشكل المجاور اوجد تحليلياً مساحة المنطقة المظللة :



نجد نقاط تقاطع $y=3$ مع $y=x^2$

$x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$A=\int_{-1}^{1}(x+2-x^2)dx+\int_{1}^{\sqrt{3}}(3-x^2)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[3x-\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{\sqrt{3}}$

$=\left[\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right]+\left[3(\sqrt{3})-\frac{(\sqrt{3})^3}{3}\right]-\left[3-\frac{1}{3}\right]$

$=4.1$

يتبع صفحة 5

السؤال الرابع :

أولا : أ) أوجد تحليلياً طول المنحنى f في الفترة $[0,3]$ حيث $f'(x)=x\sqrt{x^2+2}$

$$f'(x)=x\sqrt{x^2+2} \Rightarrow (f'(x))^2=x^2(x^2+2)$$

$$L=\int_0^3\sqrt{(1+x^4+2x^2)}dx=\int_0^3\sqrt{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int_0^3(x^2+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^3=\left[\frac{3^3}{3}+3\right]=12$$

ب) أوجد طول منحنى الدالة $y=\int_{-2}^{x}\sqrt{3t^4-1}\,dt$ (من $x=-2$ إلى $x=-1$)

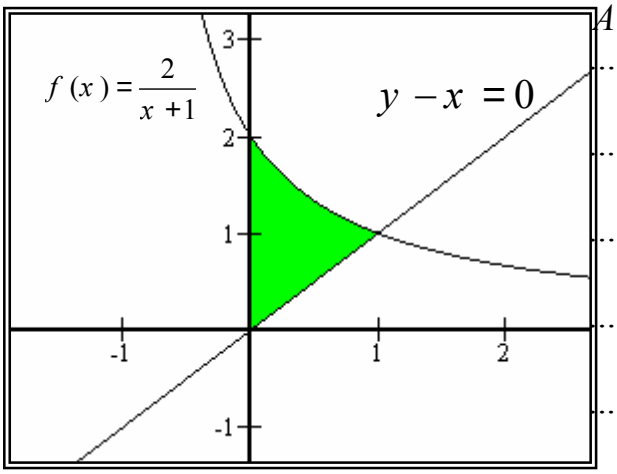
$$\frac{dy}{dx}=y'=\sqrt{3x^4-1} \Rightarrow (y')^2=3x^4-1$$

$$L=\int_{-2}^{-1}\sqrt{1+3x^4-1}dx=\int_{-2}^{-1}\sqrt{3x^4}dx=\int_{-2}^{-1}\sqrt{3}x^2dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}x^3}{3}\right]_{-2}^{-1}=\left[\frac{\sqrt{3}(-1)^3}{3}-\frac{\sqrt{3}(-2)^3}{3}\right]=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

ثانياً : أ) أوجد الحجم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=\frac{2}{x+1}$ حيث $x\geq 0$ والمستقيم $y-x=0$ ومحور الصادات وفي الربع الأول دورة كاملة حول محور السينات

$$A(x)=\pi(R^2-r^2)$$



$$A(x)=\pi\left[(\frac{2}{x+1})^2-x^2\right]=\pi\left[\frac{4}{(x+1)^2}-x^2\right]$$

$$=\pi\left[4(x+1)^{-2}-x^2\right]$$

$$V=\int_0^1\pi\left[4(x+1)^{-2}-x^2\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{4(x+1)^{-1}}{-1}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\pi\left[(-2-\frac{1}{3})-(-4-0)\right]=\frac{5\pi}{3}$$

يتبع صفحة 6

تابع السؤال الرابع:

ب) أ وجد حجم المجسم الذي يقع بيم مستويين عموديين على المحور السيني عند $x=0$, $x=1$ والمقاطع العرضية العمودية على المحور السيني في الفترة $[0,1]$ هي مثلثات متساوية الأضلاع قواعدها في المستوى xy تقع بيم المحـور السينـي والمنحنى $f(x)=\frac{2}{x+1}$

حيث $0\le x\le 1$ $y=\frac{2}{x+1}$ طول ضلع المثلث

مساحة المثلث $A=\frac{1}{2}y^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}y^2$

$$A=\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{2}{x+1})^2=\frac{\sqrt{3}}{(x+1)^2}=\sqrt{3}(x+1)^{-2}$$

$$V=\int_0^1\sqrt{3}(x+1)^{-2}dx=\left[\frac{-\sqrt{3}}{x+1}\right]_0^1=\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ثالثاً : اوجد مجموعة قيم k التي تجعل المعادلة التالية $(k-1)x^2+(5-k)y^2+6x-2y=1$ هي معادلة قطع مكافئ .

$$(k-1)(5-k)=0$$

$$(k-1)=0\Rightarrow k=1$$

$$(5-k)=0\Rightarrow k=5$$

السؤال الخامس :

أولا : إذا كانت المعادلة $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$ تمثل قطعاً ناقصاً

1) ضع المعادلة في الصورة القياسية

$$9(x^2-2x)+4(y^2+2y)-23=0$$

$$9(x^2-2x+1)-9+4(y^2+2y+1)-4-23=0$$

$$9(x-1)^2+4(y+1)^2=36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

2) أوجد إحداثيات البؤرتين .

$$c^2=a^2-b^2$$

$$C=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

البؤرتين $(1,-1\pm\sqrt{5})$

يتبع صفحة 7

تابع السؤال الخامس:

3) اوجد نقطتي طرفي المحور الأكبر و نقطتي طرفي المحور الأصغر

نقطتي طرفي المحور الأكبر $(1,2),(1,-4)$

نقطتي طرفي المحور الأصغر $(3,-1),(-1,-1)$

4) اوجد مساحة القطع الناقص حيث مساحته تعطى بالعلاقة $A = ab\pi$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \quad , \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$A = ab\pi \Rightarrow A = 3(2)\pi = 6\pi$

ثانياً : إذا كانت المعادلة $\frac{(y-3)^2}{4} - x^2 = 1$ تمثل قطعاً زائداً اوجـد :

1) المركز لهذا القطع .

$(0,3)$

2) البؤرتين .

$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$

$(h, k+c) = (0, 3+\sqrt{5})$

$(h, k-c) = (0, 3-\sqrt{5})$

3) نقطتي طرفي المحور القاطع .

$(h, k+a) = (0, 5)$

$(h, k-a) = (0, 1)$

4) معادلتي الخطين التقاربيين .

$a = 4 \quad , \quad b = 1$

$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h) \qquad y - 3 = \pm\frac{2}{1}(x-0) \Rightarrow y = \pm 2x + 3$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح