نموذج إجابة الامتحان التجريبي للصف الثاني عشر العلمي لمادة الرياضيات

السـؤال الأول : أولاً :إذا كانت $f(x)=\sqrt{4-x^2}\quad ,x\in[0,2]$

(أ) عن طريق التقريب المنتصفي وبتقسيم الفترة $[0,2]$ إلى أربع فترات متساوية احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x=0\ ,x=2$

الرسم

الفترات	منتصف الفترة c_k	الارتفاع $f(c_k)$	طول الفترة	المساحة
$[0,0.5]$	0.25	1.984	0.5	0.99
$[0.5,1]$	0.75	1.854	0.5	0.927
$[1,1.5]$	1.25	1.56	0.5	0.78
$[1.5,2]$	1.75	0.968	0.5	0.484
	مجموع $f(c_k)\,\Delta x$			3.181

(ب) احسب المساحة في (أ) باستخدام أي طريقة أخرى أدق ثم قارن بين المساحة في (أ) و(ب)

المساحة في أ أكبر من المساحة الحقيقة $A = 0.25\ \pi\ r^2 = 3.141$

(جـ) احسب القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,2]$عن طريق المساحات . عند أي قيمة لـ x تأخذ الدالة $f(x)$ هذه القيمة المتوسطة ؟

$$avrf=\frac{1}{b-a}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx = 0.5\times 3.141 = 1.57$$

$$4-x^2=1.57^2=2.465\Rightarrow x^2=1.535\Rightarrow x=1.24$$

إذا كان $\int_6^0 f(x)dx=3$, $\int_3^0 g(x)=4$, $\int_0^3 f(x)dx=5$ **أكمل :**

(1) $\int_0^3[2f(x)+3g(x)]\,dx=$ **-2**

(2) $\int_3^6 f(x)dx=$ **-8**

(3) $\int_0^6 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=$ **10** **(4)** $\int_2^5 f(x-2)dx=$ **5**

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

السـؤال الثاني : أولاً (1) إذا كانت $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ أوجد عرض المستطيل الذي له نفس المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ ومحور x وطوله هو طول فترة التكامل (القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$).

$$avr\ f = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx = 1.5$$

.....

(2) أوجد التكاملات التالية :

1. $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\ dx =$

.....

$$\int (\frac{e^x-1}{e^x+1} + 1 - 1)\ dx = \int (\frac{2e^x}{e^x+1} - 1)\ dx = 2ln\ (e^x + 1) - x + c$$

.....

.....

.....

2. $\int_1^e \frac{ln\ x}{x}\ dx = \left[\frac{1}{2}(ln\ x)^2\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}(ln\ e\ )^2\right] - \left[\frac{1}{2}(ln\ 1)^2\right] = \frac{1}{2}$

.....

ثانياً :

(1) أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = ln(\frac{x-1}{x+1})$$

$$y = ln(\ x - 1) - ln(x + 1) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$$

.....

$$y = \frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

.....

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2e^x(e^x+1)^2+4(e^x+1)e^{2x}}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^{2x}-2e^x}{(e^x+1)^3}$$

.....

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

(2) أوجد :

$$\frac{d}{dx}\int_e^{\ln x}(1-e^t)dt = (1-e^{\ln x})\frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$$

.....

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}(\sec t \tan t)dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}(\sec t \tan t)dt - \frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}(\sec t \tan t)dt =$$

$$(\sec x^2 \tan x^2)2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sec \sqrt{x} \tan \sqrt{x})$$

السؤال الثالث :

(1) إذا كان $\int_0^x f(t)dt = x^2$ **فإن** ... ... $f(4) = \cdots$

.....

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x) = 2x \Rightarrow f(4) = 8$$

.....

(2)جسيم يتحرك على محور إحداثي يتحدد موقعه بالعلاقة $s(t) = \int_0^t f(x)dx$ **حيث f هي الدالة الممثلة بالشكل المجاور . والمطلوب :**

v

(أ) ما موقع الجسيم عند $t = 0$ **؟ نقطة الأصل**

(ب) ما سرعة الجسيم عند $t = 3$ **؟ صفر**

(د) ما المسافة المقطوعة خلال الثواني السبع ؟ 12

t

(هـ) عند t=5 هل الجسيم على يمين أو يسار نقطة الأصل ؟ يسار

(و) ما إشارة العجلة عند t = 1؟ موجبة

(ز) ما قيمة العجلة عند t = 6.5 ؟ صفر

(ح) كم مرة يمر الجسيم بنقطة الأصل ؟ 3مرات

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

السؤال الرابع :

باستخدام التعويض أوجد $\int (x-1)(x-3)^5\, dx$

$x-3=u \Rightarrow x=u+3\,, dx=du\,,$

$\int (u+2)u^5 du = \int u^6 du + \int 2u^5 du = \frac{u^7}{7} + \frac{2u^5}{5} + c = \frac{(x-3)^7}{7} + \frac{2(x-3)^5}{5} + c$

$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx =$

$-\int \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx = -e^{\frac{1}{x}} + c$

باستخدام فصل المتغيرات حل المعادلات التفاضلية

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{x^2 - \ln y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} e^{x^2} e^{-\ln y} = \frac{xe^{x^2}}{ye^{\ln y}} = \frac{xe^{x^2}}{y^2}$

$y^2 dy = xe^{x^2} dx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}e^{x^2} + c \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3e^{x^2}}{2} + c}$

$\frac{dy}{dx} = xy + 2y - 3x - 6 = (y-3)(x+2)$

$\frac{dy}{(y-3)} = (x+2)dx \Longrightarrow ln|y-3| = x^2 + 2x + c \Longrightarrow y = 3 + e^{x^2+2x+c}$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

باستخدام التجزيء أوجد ما يلي :

1. $\int x^2 ln\, x^3 dx = 3\int x^2 ln\, x\, dx =$

$u = \ln x, \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = 3x^2 \Rightarrow v = x^3 \Rightarrow 3\int x^2 ln\, x\, dx =$

$x^3 \ln x - \int x^3 \frac{dx}{x} = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + c$

2. $\int sec^{-3} x\, dx =$

$$\int \frac{1}{\sec^3 x}\, dx = \int \cos^3 x\, dx = \int (cos^2 x)\cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx =$$

$$\int \cos x\, dx - \int \sin^2 x cos\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

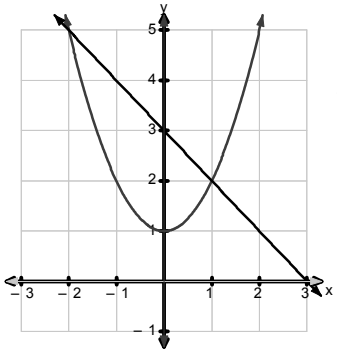
باستخدام الكسور الجزئية أوجد $\int \frac{3x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+2)}\, dx$

$$\frac{3x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x+2)} = \frac{(Ax+B)(X+2)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x+2)} \Rightarrow 3x^2 + 2x + 2 = (Ax + B)(X + 2) + C(x^2 + 1)$$

$$x = -2 \Rightarrow C = 2, x = 0 \Rightarrow B = 0, x = 1 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \int \frac{3x^2+2x+2}{(x^2+1)(x+2)}\, dx = \int \frac{xdx}{(x^2+1)} + \int \frac{2}{(x+2)} dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln|x + 2| + c$$

السؤال الخامس : أوجد مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة $g(x) = 3 - x$ ومحور السينات $y = 0$ ومحور الصادات $x = 0$



$A_1 = \int_0^1 (x^2 + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$

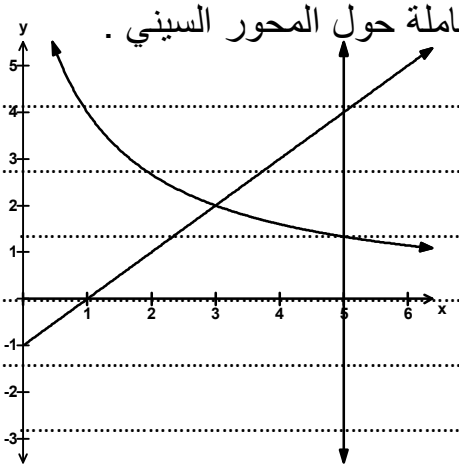
$A_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

أوجد باستخدام التكامل المحدود طول المنحنى $y = -x + 3 \quad , 0 \le x \le 2$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{2}\, dx = 2\sqrt{2}$$

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيين $f(x) = \frac{8}{x+1} \ , g(x) = x - 1$ والمستقيم $x = 5$ ومحور السينات والواقعة في الربع الأول دورة كاملة حول المحور السيني .

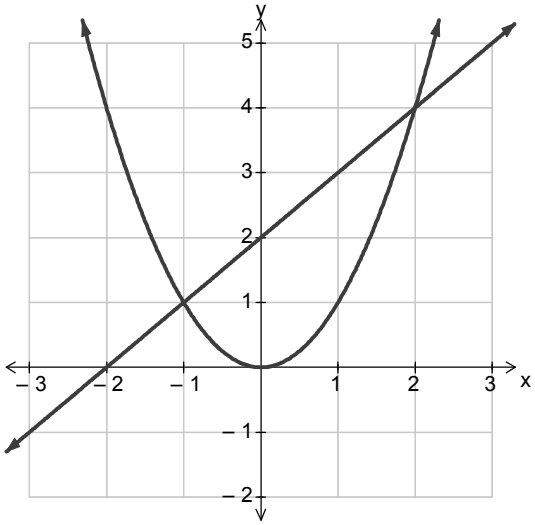


$$v_1 = \pi \int_1^3 (x-1)^2 dx = \left[\frac{\pi(x-1)^3}{3}\right]_1^3 = \frac{8\pi}{3}$$

$$v_2 = \pi \int_3^5 \frac{64}{(x+1)^2} dx = \left[\frac{64\pi(x+1)^{-1}}{-1}\right]_3^5 = \frac{32\pi}{3}$$

$$v = v_1 + v_2 = \frac{40\pi}{3}$$

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور



$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 4.5$$

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com

السؤال السادس :

أوجد معادلة القطع الزائد في الصورة القياسية إذا كانت نقطتا طرفي المحور القاطع له هما

(6,1) , (1 , -2) وميل أحد المقاربين هو 5/3 .

بما أن نقطتا طرفي المحور القاطع له هما *(6,1) , (1 , -2)* فإن محوره القاطع يوازي المحور السيني ومعادلته من الشكل $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ وبما أن ميل أحد المقاربين هو 5/3 فإن $\frac{b}{a} = \frac{5}{3} \Longrightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{25}{9}$

ولكن $c + h = 6 , c - h = -2 \Longrightarrow c = 2 , h = 4$ ولكن $c^2 = b^2 + a^2$ إذاً $\frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{9+25}{9}$

والمعادلة هي $\frac{c^2}{a^2} = \frac{34}{9} \Longrightarrow \frac{4}{a^2} = \frac{34}{9} \Longrightarrow a^2 = \frac{36}{34} \Longrightarrow b^2 = \frac{100}{34}$ $\frac{(x-4)^2}{\frac{36}{34}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{100}{34}} = 1$

إذا كانت معادلة المنحنى c هي $x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 16 = 0$ فالمطلوب :

أثبت أن c هو قطع مخروطي وأوجد بؤرتيه وطرفي المحاور فيه ؟

$x^2 + 8x + 16 + 4(y^2 - 4y + 4) - 16 = 0$

$(x + 4)^2 + 4(y - 2)^2 = 16 \Longrightarrow \frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

وهي معادلة قطع ناقص محوره القاطع هو محور السينات وبؤرتاه $(-4 - 2\sqrt{3} , 2) , (-4 + 2\sqrt{3} , 2)$

وطرفي المحور الكبير هما $(0 , 2) (-8 , 2)$ والصغير $(-4 , 0) , (-4 , 4)$ ،

PDF created with pdfFactory trial version www.pdffactory.com